T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 5 avril 2024

Fiche

30 minutes

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : ….. / 20

Dans les exercices **I** et **II**, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

I. (7 points : 1°) 3 points + 1 point pour la rigueur, la rédaction, les notations etc. ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On donne les points $\text{A}(1\,;-1\,;4)$ et $\text{B}(0\,;0\,;3)$ de $\mathcal{E}$.

1°) Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite (OA) et passant par le point B.
On demande de rédiger selon le modèle donné sur la feuille annexe.

………..

………..

………..

………..

………..

2°) On note E, F, G les points d'intersection de P respectivement avec l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, l'axe des cotes.
Déterminer les coordonnées de E, F, G.

……………………………..	……………………………..	……………………………..

3°) Déterminer les coordonnées du point I de P dont l'ordonnée est l'opposé de son abscisse et la cote est égale à l'abscisse.

……………………………..

II. (9 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points : 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On donne les plans P et Q les plans d'équations respectives $2x + y + 3z - 6 = 0$ et $x + y = 2$.

1°) Expliquer pourquoi les plans *P* et *Q* ne sont pas parallèles.

………..

………..

………..

2°) On note *D* la droite d'intersection des plans *P* et *Q*. Déterminer un système d'équations paramétriques de *D*.

3°) Soit A le point de *D* d'abscisse 0. Quelles sont les coordonnées de A ?

……………………………..

4°) On note B le point d'intersection de *Q* avec l'axe $(\mathrm{O}x)$.
Calculer la distance du point B au plan *P*.

………..

III. (4 points : 2 points + 2 points)

Dans l'espace ***E***, on considère un cube ABCDEFGH d'arête 1. On note I le milieu de $[\mathrm{EF}]$.

.

On munit l'espace ***E*** du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

En utilisant les coordonnées dans ce repère, calculer les produits scalaires $p = \overrightarrow{\mathrm{AI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $p' = \overrightarrow{\mathrm{AI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AG}}$.

…………………………….. ……………………………..

Écrire le calcul donnant les résultats.

………..

Bonus sur 1 point :

Quel est l'ensemble *F* des points $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ de ***E*** tels que $\ln\left(x^2+y^2+z^2+1\right)=2$?
Répondre avec précision par une phrase rédigée selon le modèle à recopier et compléter : « L'ensemble *F* est … ».

………..

Feuille annexe de l'interrogation écrite du 5-4-2024

L'utilisation du symbole d'équivalence est interdite en dehors de la question 1°) de l'exercice **I** (l'utilisation de ce symbole doit toujours être réfléchie).

I.

1°) La réponse à cette question doit être rédigée selon la méthode donnée dans l'encadré ci-dessous :

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\,;y\,;z)$. $\text{M} \in P \Leftrightarrow$ ………… (égalité avec un produit scalaire) $\Leftrightarrow$ ………… $\Leftrightarrow$ …………

On pourra conclure de diverses manières :

Une équation cartésienne de P s'écrit ….. .

P a pour équation cartésienne ….. .

II.

4°) La distance du point B au plan P se note $\text{d}(\text{B}, P)$. On présentera donc le calcul sous la forme : $\text{d}(\text{B}, P) = ...$.

III.

Dans les deux cases, on attend une égalité de la forme $p = ...$ et $p' = ...$.

Le calcul demandé doit faire intervenir les coordonnées dans le repère imposé.

On pourra donner le résultat sous forme fractionnaire ou sous forme décimale s'il s'agit d'un nombre décimal.

Corrigé de l'interrogation écrite du 5-4-2024

Dans les exercices **I** et **II**, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

I.

On donne les points $\mathrm{A}(1\,;-1\,;4)$ et $\mathrm{B}(0\,;0\,;3)$ de $\mathcal{E}$.

1°) Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite (OA) et passant par le point B.
On demande de rédiger selon le modèle donné sur la feuille annexe.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

La droite (OA) admet le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}(1\,;-1\,;4)$ pour vecteur directeur.
Comme $(\mathrm{OA}) \perp P$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ est un vecteur normal à P.

.

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 3 - 2 + 2 = 3$

$\vec{u} \bullet \vec{v} \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

$\mathrm{M} \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BM}} = 0$ $\quad$ [$\overrightarrow{\mathrm{BM}}\,(x\,;y\,;z-3)$]

$\Leftrightarrow 1\times(x-0)+(-1)\times(y-0)+4\times(z-3)=0$ $\quad$ [ligne facultative]

$\Leftrightarrow x-y+4(z-3)=0$

$\Leftrightarrow x-y+4z-12=0$

On pourra conclure de plusieurs manières :

Une équation cartésienne de P s'écrit $x-y+4z-12=0$.

P a pour équation cartésienne $x-y+4z-12=0$.

2°) On note E, F, G les points d'intersection de P respectivement avec l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, l'axe des cotes.
Déterminer les coordonnées de E, F, G.

$\mathrm{E}(12\,;0\,;0)$	$\mathrm{F}(0\,;-12\,;0)$	$\mathrm{G}(0\,;0\,;3)$

• $E \in (Ox)$ donc $y_E = 0$ et $z_E = 0$.
$E \in P$ donc $x_E - y_E + 4z_E - 12 = 0$ d'où $x_E - 0 + 4 \times 0 - 12 = 0$ soit $x_E - 12 = 0$ donc $x_A = 12$.

• $F \in (Oy)$ donc $x_F = 0$ et $z_F = 0$.
$F \in P$ donc $x_F - y_F + 4z_F - 12 = 0$ d'où $0 - y_F + 4 \times 0 - 12 = 0$ soit $-y_F - 12 = 0$ donc $y_F = -12$.

• $G \in (Oz)$ donc $x_G = 0$ et $y_G = 0$.
$G \in P$ donc $x_G - y_G + 4z_G - 12 = 0$ d'où $0 - 0 + 4z_G - 12 = 0$ soit $4z_G - 12 = 0$ donc $z_G = 3$.

3°) Déterminer les coordonnées du point I de *P* dont l'ordonnée est l'opposé de son abscisse et la cote est égale à l'abscisse.

$$\boxed{I(2\,;-2\,;2)}$$

On a $y_I = -x_I$ et $z_I = x_I$.
Comme $I \in P$, $x_I - y_I + 4z_I - 12 = 0$, on a $x_I - (-x_I) + 4x_I - 12 = 0$ soit $x_I + x_I + 4x_I - 12 = 0$ ou encore $x_I + x_I + 4x_I - 12 = 0$, ce qui donne immédiatement $x_I = 2$.

II.

On donne les plans *P* et *Q* les plans d'équations respectives $2x + y + 3z - 6 = 0$ et $x + y = 2$.

1°) Expliquer pourquoi les plans *P* et *Q* ne sont pas parallèles.

Le vecteur $\vec{u}(2\,;1\,;3)$ est un vecteur normal à *P*.

Le vecteur $\vec{v}(1\,;1\,;0)$ est un vecteur normal à *Q*.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (on peut voir aisément qu'il n'existe pas de réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou bien calculer un déterminant d'ordre 2 non nul) donc les plans *P* et *Q* ne sont pas parallèles.

2°) On note *D* la droite d'intersection des plans *P* et *Q*. Déterminer un système d'équations paramétriques de *D*.

$$\boxed{\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 3t - 2 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}}$$

La précision $t \in \mathbb{R}$ est très importante ; – 1 point dans le barème en cas d'oubli.

On peut écrire $P \cap Q = D$.

Pour déterminer un système d'équations paramétriques de *D*, on considère le système $\begin{cases} 2x+y+3z-6=0 \\ x+y=2 \end{cases}$.

Ce système est équivalent à $\begin{cases} 2x+y=6-3z & (1) \\ x+y=2 & (2) \end{cases}$.

On pose $z=t \quad (t \in \mathbb{R})$.

L'équation (1) donne alors l'équation $2x+y=6-3t \quad (1')$.

On résout alors le système linéaire $\begin{cases} (1') \\ (2) \end{cases}$ de deux équations à deux inconnues avec le paramètre *t*.

Le déterminant est non nul donc le système admet un unique couple solution.
On peut utiliser la méthode des multiplicateurs ou la méthode matricielle ou même appliquer directement es formules de Cramer.

$$\begin{cases} 2x+y=6-3t \\ x+y=2 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \times 1 \\ \times(-1) \end{array} \right| \begin{array}{c} \times(-1) \\ \times 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} (1') \\ (2') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-3t \\ y=3t-2 \end{cases}$$

Un système d'équations paramétriques de *D* s'écrit donc $\begin{cases} x=4-3t \\ y=3t-2 \\ z=t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

① On peut aussi résoudre le système $\begin{cases} (1') \\ (2) \end{cases}$ par substitution conduisant successivement aux systèmes équivalents suivants :

$\begin{cases} 2x+y=6-3t \\ y=2-x \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+2-x=6-3t \\ y=2-x \end{cases}$; $\begin{cases} x=4-3t \\ y=2-(4-3t) \end{cases}$; $\begin{cases} x=4-3t \\ y=3t-2 \end{cases}$.

② Il est possible de ne pas poser $z=t$ pour la résolution du système $\begin{cases}2x+y+3z-6=0 & (1)\\ x+y=2 & (2)\end{cases}$.

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=6-3z\\ x+y=2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=4-3z\\ x+y=2\end{cases}$ (la première équation est obtenue par soustraction membre à membre des deux équations)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=4-3z\\ y=2-(4-3z)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=4-3z\\ y=-2+3z\end{cases}$$

③ Sur la calculatrice Numworks, on peut utiliser l'astuce du π pour résoudre le système $\begin{cases}2x+y+3z-6=0\\ x+y=2\end{cases}$.

On va dans la rubrique Équations et on remplace par exemple z par π ou e.

④ Le système d'équations paramétriques de D obtenu permet de dire que le vecteur $\overrightarrow{w}(-3\,;3\,;1)$ est un vecteur directeur de D.
On vérifie aisément que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (vecteurs normaux aux plans P et Q donnés dans la question 1°)), ce qui est « logique » faire une figure).

Il est tout à fait possible de prendre x ou y pour paramètre.

Si on prend x comme paramètre en posant $x=t$ $(t\in\mathbb{R})$, on obtient le système d'équations paramétriques suivant de D : $\begin{cases}x=t\\ y=2-t\\ z=\dfrac{4-t}{3}\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Si on prend y comme paramètre en posant $y=t$ $(t\in\mathbb{R})$, on obtient le système d'équations paramétriques suivant de D : $\begin{cases}x=2-t\\ y=t\\ z=\dfrac{t+2}{3}\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

3°) Soit A le point de *D* d'abscisse 0. Quelles sont les coordonnées de A ?

$$\boxed{A\left(0\,;2\,;\frac{4}{3}\right)}$$

Il y a plusieurs manières pour répondre à la question.

1ère méthode : On utilise le système d'équations paramétriques de *D* obtenu à la question précédente.

On a $x_A = 0$.

Le paramètre t du point A sur *D* vérifie donc $4-3t=0$, ce qui donne $t=\frac{4}{3}$.

On remplace alors t par $\frac{4}{3}$ pour déterminer l'ordonnée et la cote de A : $y_A = 3\times\frac{4}{3}-2=4-2=2$; $z_A=\frac{4}{3}$.

2e méthode : On utilise les équations cartésiennes des deux plans.

On a $x_A = 0$.

On sait que $A \in Q$ donc $x_A + y_A = 2$ d'où $0 + y_A = 2$ soit $y_A = 2$.

$A \in P$ donc $2x_A + y_A + 3z_A - 6 = 0$.
En remplaçant x_A et y_A par leurs valeurs, on obtient $2\times 0+2+3z_A-6=0$, ce qui donne $3z_A-4=0$ et donc $z_A=\frac{4}{3}$.

Vérification des résultats sur calculatrice Numworks :

On résout le système $\begin{cases} x=0 \\ 2x+y+3z-6=0 \\ x+y=2 \end{cases}$ ou le système $\begin{cases} x=0 \\ x=4-3t \\ y=3t-2 \\ z=t \end{cases}$.

4°) On note B le point d'intersection de *Q* avec l'axe $(\mathrm{O}x)$.
Calculer la distance du point B au plan *P*.

On commence par calculer les coordonnées de B.

$B \in (\mathrm{O}x)$ donc $y_B = 0$ et $z_B = 0$.
$B \in Q$ donc $x_B + y_B = 2$ d'où $x_B + 0 = 2$ soit $x_B = 2$.

On a donc $B(2\,;0\,;0)$.

On applique la formule de distance d'un point à un plan dans un repère orthonormé.

$$d(\mathrm{B}, P) = \frac{|2\times 2+0+3\times 0-6|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}$$

$$= \frac{|4-6|}{\sqrt{4+1+9}}$$

$$= \frac{|-2|}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}}$$

On laisse sans problème le radical au dénominateur.

III.

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère un cube ABCDEFGH d'arête 1. On note I le milieu de $[\mathrm{EF}]$.

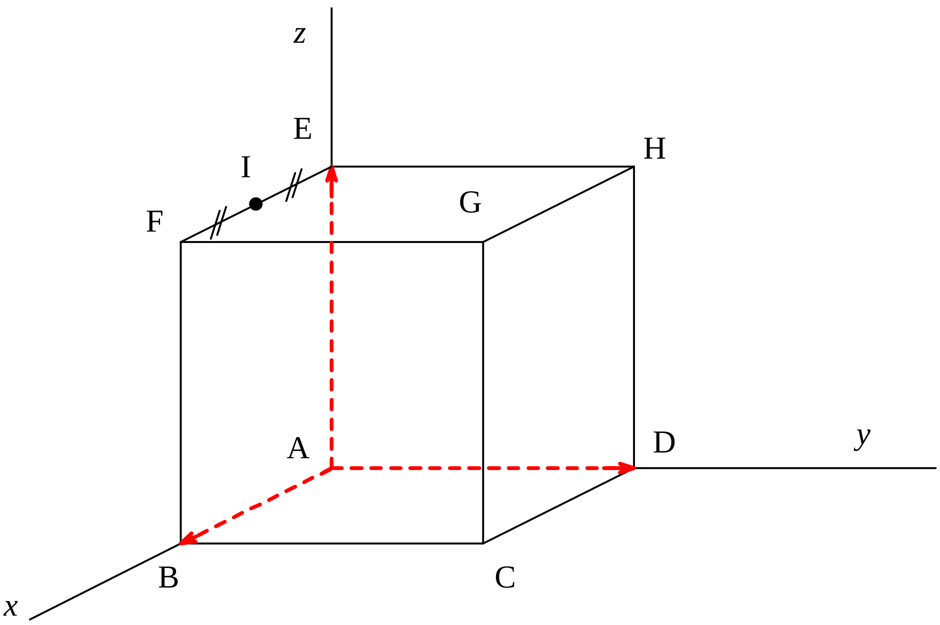
On munit l'espace $\mathcal{E}$ du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

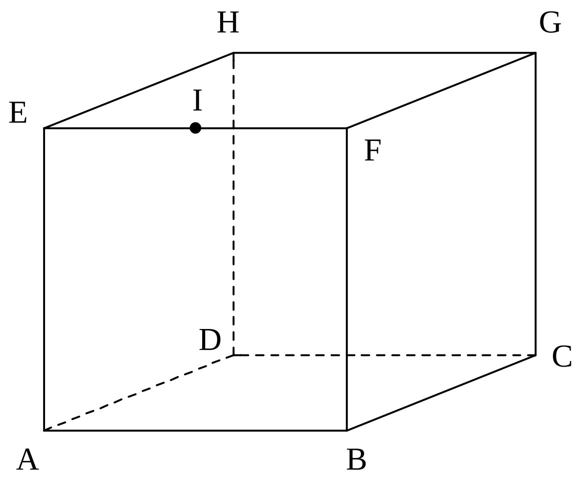
En utilisant les coordonnées dans ce repère, calculer les produits scalaires $p = \overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $p' = \overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AG}}$.

$p = \dfrac{1}{2}$	$p' = \dfrac{3}{2}$

Écrire le calcul donnant les résultats.

Pour la figure, on choisi une disposition commode pour visualiser les coordonnées dans le repère.





On vérifie aisément que le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ est bien orthonormé.

$\mathrm{A}\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.$ $\qquad$ $\mathrm{C}\left|\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right.$ $\qquad$ $\mathrm{G}\left|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right.$ $\qquad$ $\mathrm{I}\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{matrix}\right.$

Les coordonnées de I peuvent s'obtenir en utilisant la formule des coordonnées d'un milieu.

$\overrightarrow{\mathrm{AI}}\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{matrix}\right.$ $\qquad$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\left|\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right.$ $\qquad$ $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\left|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right.$

On applique l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée de l'espace.

$$p = \overrightarrow{\mathrm{AI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$p' = \overrightarrow{\mathrm{AI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0$$

$$= \frac{3}{2}$$

Vérification des résultats sur calculatrice Numworks (rubrique Matrices et vecteurs) :

$$\text{dot}\left(\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right) \text{ ou : } \text{dot}\left(\begin{bmatrix}0.5\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$\text{dot}\left(\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\right) \text{ ou } \text{dot}\left(\begin{bmatrix}0.5\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

L'utilisation du repère est ici particulièrement intéressante pour calculer ces deux produits scalaires. Il s'agit d'un repère auxiliaire.

Bonus sur 1 point :

Quel est l'ensemble F des points $\text{M}(x\,;y\,;z)$ de $\boldsymbol{E}$ tels que $\ln\left(x^2+y^2+z^2+1\right)=2$?
Répondre avec précision par une phrase rédigée selon le modèle à recopier et compléter : « L'ensemble F est … ».

Soit M un point quelconque de $\boldsymbol{E}$ de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$$\begin{aligned}
\text{M}\in F &\Leftrightarrow \ln\left(x^2+y^2+z^2+1\right)=2\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+1=\text{e}^2\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+1=\text{e}^2-1\\
&\Leftrightarrow \text{OM}^2=\text{e}^2-1 \qquad\qquad \text{[ligne facultative]}\\
&\Leftrightarrow \text{OM}=\sqrt{\text{e}^2-1} \quad (\text{car } \text{e}^2-1>0) \quad \text{[ligne facultative]}
\end{aligned}$$

F est la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{\text{e}^2-1}$.