T
exp

Interrogation écrite du vendredi 26 avril 2024

Pas de fiche

20 minutes

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………….

Note : ….. / 20

L'utilisation du symbole d'équivalence est interdite.

I. (12 points)

Partie 1 (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 4 points)

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice identité d'ordre 2.

1°) Déterminer la matrice J telle que $\mathrm{A}=3\mathrm{I}+\mathrm{J}$. On donnera la matrice J sans explication.

2°) Calculer J^2. On donnera le résultat sans explication.

3°) À l'aide de la formule du binôme de Newton, et en justifiant son utilisation, démontrer que, pour tout entier naturel n on a $\mathrm{A}^n=3^n\mathrm{I}+n3^{n-1}\mathrm{J}$ et en déduire que $\mathrm{A}^n=3^{n-1}\begin{pmatrix} 3+n & -n \\ n & 3-n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

Vérifier avec dcode

Partie 2 (6 points : 1°) 1 point + 1 point + 2 points ; 2°) 2 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes u_0 et v_0 ainsi que par les relations de récurrence $\begin{cases} u_{n+1}=4u_n-v_n \\ v_{n+1}=u_n+2v_n \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

Le but de cette partie est d'obtenir les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0, v_0.

Comment faut-il choisir u_0 et v_0 pour que les suites (u_n) et (v_n) soient constantes ?

1°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel *n*.

Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n. On répondra par une seule égalité sans explication.

En déduire X_n en fonction de A et de X_0. On répondra par une seule égalité sans explication.

Finir en utilisant le résultat de la partie 1. On donnera sans explication les expressions de u_n et v_n en fonction de *n*, u_0, v_0.

2°) Dans cette question, on suppose que $u_0 = v_0 = a$, où *a* est un réel donné.
Donner les expressions de u_n et v_n en fonction de *n* et de *a* sous la forme la plus simple possible.

II. (4 points : 2 points + 2 points)

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Pour tout réel *x* on pose $E = \left(\cos^2 x\right)C + \left(\sin^2 x\right)D$ et $F = \left(\sin^2 x\right)C - \left(\cos^2 x\right)D$.

Écrire les matrices E et F sous la forme la plus simple possible.

III. (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les vecteurs $\vec{u}\left(\cos x\,;-2\sin 3x\right)$ et $\vec{v}\left(2\cos 3x\,;\sin x\right)$.

Exprimer le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sous la forme la plus simple possible, en ne faisant intervenir qu'un seul cosinus ou qu'un seul sinus.

Quels sont les réels *x* tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux ?

Quels sont les réels pour lesquels le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est maximal ?