T
exp

Interrogation écrite de cours du vendredi 29 mars 2024 (20 minutes)

Pas de fiche
Calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (2 points)

René dispose de deux seaux, l'un de 12 L et l'autre de 16 L. Il s'aperçoit qu'en versant un nombre entier de fois le contenu d'un bidon dans chacun d'eux, il peut les remplir exactement.
Quelle est la contenance maximale de ce bidon ?

…….

II. (5 points : 3 points pour la réponse dont 1 point de rigueur + 2 points pour la propriété)

Soit a et b deux entiers relatifs. On suppose que a est divisible par b et $b+1$.
Que peut-on en déduire ? Justifier la réponse.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

Citer la propriété générale utilisée en donnant une formulation en français sur le modèle « Si …, alors … ».

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 3 points)

Pour tout entier relatif n on pose $a=12n+7$ et $b=3n+1$.

1°) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le PGCD de a et b pour tout entier relatif n. Répondre par une phrase.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

Le but de la suite de l'exercice est de démontrer cette conjecture.

2°) Former une combinaison linéaire de a et de b à coefficients entiers relatifs dont le résultat est un entier naturel non nul indépendant de n (le plus petit possible).

……………………………………….. (une seule égalité)

3°) Soit d un diviseur positif commun à a et b.
Déterminer la valeur de d puis conclure. On attend une réponse bien rédigée, en écrivant une idée par ligne.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

IV. (2 points)

On dispose de 48 boules rouges, 40 boules bleues et 72 boules jaunes.
On souhaite réaliser des boîtes contenant le même nombre de boules de chaque couleur.

Quel nombre maximal de boîtes peut-on réaliser ? …. Compléter la phrase explicative suivante :

Ce nombre est …………………………………………………………………………………………… .

Quelle est la composition de chaque boîte ?

Nombre de boules rouges	Nombre de boules bleues	Nombre de boules jaunes
…..	…..	…..

V. (5 points : 1°) 2 point ; 2°) 3 points)

On considère l'équation $3x+4y=1$ (E) d'inconnue $(x, y)\in\mathbb{Z}^2$.

1°) Déterminer la (ou les) solution(s) de (E) constituée(s) d'entiers opposés.

………………..

2°) Déterminer toutes les solutions de (E). Répondre par une phrase.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 29-3-2024

I.

René dispose de deux seaux, l'un de 12 L et l'autre de 16 L. Il s'aperçoit qu'en versant un nombre entier de fois le contenu d'un bidon dans chacun d'eux, il peut les remplir exactement.
Quelle est la contenance maximale de ce bidon ?

4 L

Le PGCD de 12 et 16 est 4 donc le bidon a une contenance maximale de 4 L.

On peut déterminer le PGCD par plusieurs méthodes :
- méthode directe (ensemble des diviseurs communs) ;
- algorithme d'Euclide ou des différences ;
- décomposition en facteurs premiers ($12 = 2^2 \times 3$ et $16 = 2^4$) ;
- utilisation de la calculatrice.

II.

Soit a et b deux entiers relatifs. On suppose que a est divisible par b et $b+1$.
Que peut-on en déduire ? Justifier la réponse.

b et $b+1$ sont premiers entre eux car ce sont deux entiers consécutifs (propriété du cours : « Deux entiers relatifs consécutifs sont premiers entre eux ») donc a est divisible par le produit $b(b+1)$ (propriété du cours).

Citer la propriété générale utilisée en donnant une formulation en français sur le modèle « Si …, alors … ».

Si un entier est divisible par deux entiers relatifs premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit.

On énonce la propriété dans le cas général, sans utiliser de lettres telles que *a*, *b*, *c* qui pourraient être sources de confusion.

Il y a même équivalence :

Un entier est divisible par deux entiers relatifs premiers entre eux si et seulement si il est divisible par leur produit.

III.

Pour tout entier relatif *n* on pose $a=12n+7$ et $b=3n+1$.

1°) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le PGCD de *a* et *b* pour tout entier relatif *n*. Répondre par une phrase.

Avec la calculatrice, on rentre :

$f(x)=12x+7$ $g(x)=3x+1$ $h(x)=\text{gcd}(f(x),g(x))$	ou directement	$f(x)=\text{gcd}(12x+7,3x+1)$

On obtient un tableau de valeurs avec un « pas de 1 » (la calculatrice se règle toute seule dès lors que l'on tape gcd).

On pouvait aussi calculer à la main *a* et *b* pour différentes valeurs de *n*.

On peut conjecturer que le PGCD de *a* et *b* est égal à 1 pour tout entier relatif *n*.

Remarques :

① La rédaction doit vraiment faire apparaître qu'il s'agit d'une conjecture.

$\boxed{\text{On peut conjecturer que}}$ le PGCD de *a* et *b* est égal à 1 pour tout entier relatif *n*.

$\boxed{\text{Il semble que}}$ le PGCD de *a* et *b* est égal à 1 pour tout entier relatif *n*.

② La quantification universelle « pour tout entier relatif *n* » doit absolument apparaître dans cette phrase.

Le barème en tenait compte avec – 1 point en cas d'absence.

Le but de la suite de l'exercice est de démontrer cette conjecture.

2°) Former une combinaison linéaire de *a* et de *b* à coefficients entiers relatifs dont le résultat est un entier naturel non nul indépendant de *n* (le plus petit possible).

$$a-4b=3$$

3°) Soit *d* un diviseur positif commun à *a* et *b*.
Déterminer la valeur de *d* puis conclure. On attend une réponse bien rédigée, en écrivant une idée par ligne.

Comme *d* divise *a* et *b*, *d* divise toute combinaison linéaire de *a* et *b* à coefficients entiers relatifs.
En particulier, *d* divise $a-4b=3$ (coefficients 1 et – 4).
Or les diviseurs positifs de 3 sont 1 et 3 donc *d* est égal à 1 ou 3.
De plus, *a* et *b* ne sont pas divisibles par 3 (somme d'un multiple de 3 et d'un entier non multiple de 3).
On en déduit que $d=1$. Par conséquent, *a* et *b* sont premiers entre eux.

On utilise la propriété :

> Soit a, b, q des entiers relatifs.
> - Si a et b sont des multiples de q, alors $a+b$ est un multiple de q.
> - Si a est un multiple de q et b n'est pas un multiple de q, alors $a+b$ n'est pas un multiple de q.
> - Si a est un multiple de q, alors ab est un multiple de q.

Une autre méthode efficace consiste à écrire des égalités du type division euclidienne :

$$12n+7b=4\times(3n+1)+3$$
$$3n+1=3\times n+1$$
$$3=3\times 1+0$$

Il s'agit d'une sorte d'algorithme d'Euclide (les égalités ne sont pas forcément des divisions euclidiennes, donc on ne peut pas dire qu'il s'agit de l'algorithme d'Euclide). Cela n'a pas d'importance.

Avec le lemme d'Euclide, on peut affirmer que le PGCD de a et b est égal à 1.

En reprenant la même idée, on peut aussi utiliser le principe de réduction d'un PGCD.

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(a,b)&=\text{PGCD}(3n+1,3)\\&=\text{PGCD}(1,3)\\&=1\end{aligned}$$

IV.

On dispose de 48 boules rouges, 40 boules bleues et 72 boules jaunes.
On souhaite réaliser des boîtes contenant le même nombre de boules de chaque couleur.

Quel nombre maximal de boîtes peut-on réaliser ? 8 Compléter la phrase explicative suivante :

Ce nombre est le PGCD de 48, 40 et 72.

On peut déterminer ce PGCD directement ou utiliser la calculatrice.
On peut utiliser la calculatrice.

Quelle est la composition de chaque boîte ?

Nombre de boules rouges	Nombre de boules bleues	Nombre de boules jaunes
6	5	9

V.

On considère l'équation $3x+4y=1$ (E) d'inconnue $(x,\, y)\in\mathbb{Z}^2$.

1°) Déterminer la (ou les) solution(s) de (E) constituée(s) d'entiers opposés.

$$(-1\,;1)$$

On résout l'équation $3x+4\times(-x)=1$.

2°) Déterminer toutes les solutions de (E). Répondre par une phrase.

Les solutions de (E) sont tous les couples $(-1-4k\,;1+3k)$ avec k entier relatif.

On applique la propriété générale :

> Soit a et b deux entiers relatifs premiers entre eux.
> On considère l'équation $ax+by=1$ d'inconnue $(x,\, y)\in\mathbb{Z}^2$.
> Soit $(x_0\,;\, y_0)$ une solution particulière de (E).
> Les solutions de (E) sont tous les couples $(x_0-bk\,;\, y_0+ak)$ avec k entier relatif.

La propriété peut s'appliquer car 3 et 4 sont premiers entre eux.

Notes sur le barème

I. – 1 point si unité oubliée

III.

1°) – 1 point si quantification oubliée ou conjecture mal formulée (bonne façon : « Il semble que … »).

V.

1°) – 1 point si problème de notation (bonne notation couple avec des parenthèses).

2°) – 1 point si la règle est donnée avec dans le cas général et pas appliquée à la situation.