T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 22 mars 2024

Fiche

30 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) On considère la fonction $u : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ définie sur $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

Compléter sans justifier l'égalité :

$$\lim_{x \to 0} u(x) = \ldots..$$

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

En observant que pour tout réel x on a $f(x) = u\left(\mathrm{e}^{x}\right)$, déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Justifier.

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Soit ABCD un parallélogramme tel que $\mathrm{AB} = 5$, $\mathrm{AD} = 3$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{15}{2}$.

1°) Quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{BAD}}$?

…… (une seule réponse)

2°) Calculer $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)^2$; en déduire AC. S'il reste du temps à la fin, vérifier le résultat sur une figure.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

III. (14 points)

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère un pavé droit ABCDEFGH. On note I centre de la face ADHE et J le milieu du segment $[\text{GH}]$.

Partie 1 (9 points : 1°) 1 point + 1 point + 1 point ; 2°) 2 points + 2 points + 2 points)

Dans cette partie, on suppose que $\text{AB}=3$ et $\text{AD}=\text{AE}=2$.

1°) Compléter la deuxième colonne du tableau ci-dessous en écrivant la valeur de chaque produit scalaire.

$p_1=\overrightarrow{\text{AB}}\bullet\overrightarrow{\text{JH}}$	
$p_2=\overrightarrow{\text{AH}}\bullet\overrightarrow{\text{DE}}$	
$p_3=\overrightarrow{\text{JH}}\bullet\overrightarrow{\text{JG}}$	

2°) Compléter la deuxième colonne du tableau ci-dessous de la manière suivante :

- dans la deuxième colonne, écrire un produit scalaire égal en utilisant un projeté orthogonal bien choisi ;

- dans la troisième colonne écrire le résultat du produit scalaire.

$p_4=\overrightarrow{\text{EJ}}\bullet\overrightarrow{\text{EH}}$		
$p_5=\overrightarrow{\text{IJ}}\bullet\overrightarrow{\text{AH}}$		
$p_6=\overrightarrow{\text{ED}}\bullet\overrightarrow{\text{EA}}$		

Partie 2 (5 points : 1°) 1 point + 1 point + 1 point ; 2°) 1 point + 1 point)

1°) Dans chaque cas, indiquer si les vecteurs sont orthogonaux. Écrire oui ou non dans la colonne de droite.

$\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{FJ}}$	……
$\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{CJ}}$	……
$\overrightarrow{\text{BE}}$ et $\overrightarrow{\text{BG}}$	……

2°) Entourer la réponse exacte :

- L'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{\text{CM}}\bullet\overrightarrow{\text{EF}}=0$ est le plan :

(ADH) (BCG) (ABE)

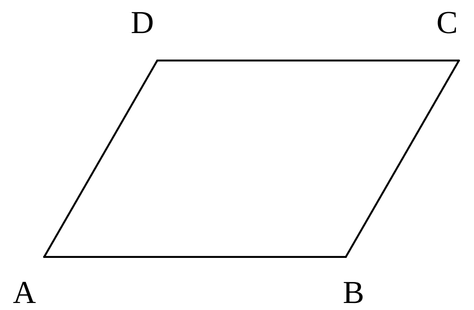
- L'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{\text{BC}}\bullet\overrightarrow{\text{MA}}=0$ est le plan :

(BDF) (ACH) (BEF)

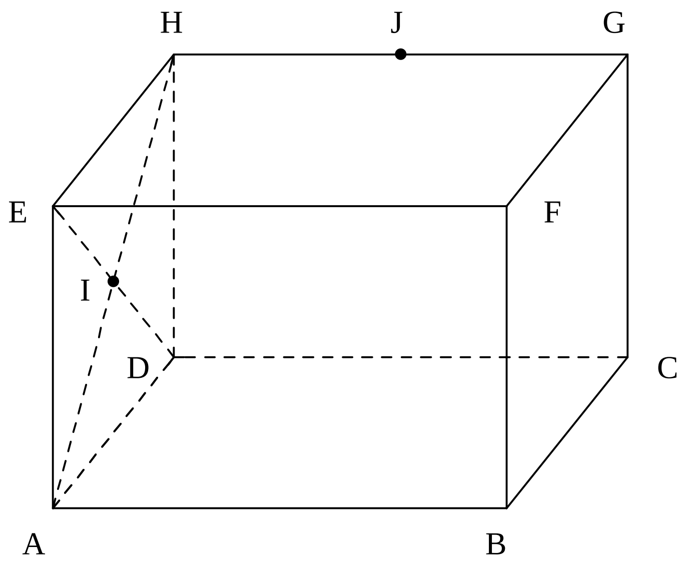
Feuille annexe à conserver

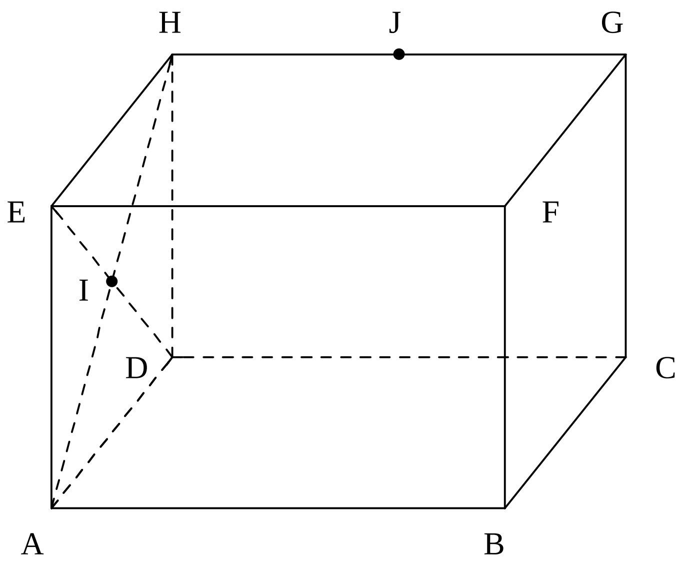
On pourra effectuer sur cette feuille au critérium tous les tracés utiles.

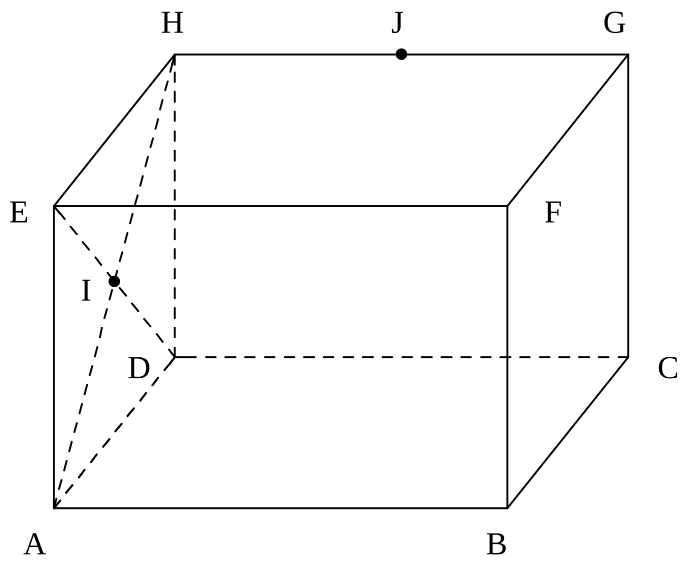
II.



III.







Corrigé de l'interrogation écrite du 22-3-2024

I.

1°) On considère la fonction $u : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ définie sur $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

Compléter sans justifier l'égalité :

$$\lim_{x \to 0} u(x) = 1$$

Il s'agit d'une limite de référence.

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

En observant que pour tout réel x on a $f(x) = u\left(\mathrm{e}^{x}\right)$, déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Justifier.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\underbrace{\mathrm{e}^{x}}_{X}\right) = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} u(X) = 1 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

La calculatrice ne permet pas de bien voir la limite demandée.

II.

Soit ABCD un parallélogramme tel que $\mathrm{AB} = 5$, $\mathrm{AD} = 3$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{15}{2}$.

1°) Quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{BAD}}$?

60 (une seule réponse)

On a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AD} \times \cos \widehat{\mathrm{BAD}}$ (on évite l'écriture avec les normes).

On peut donc écrire :

$$\cos \widehat{\mathrm{BAD}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}}{\mathrm{AB} \times \mathrm{AD}}$$

$$= \frac{\frac{15}{2}}{5 \times 3}$$

$$= \frac{1}{2}$$

La mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{BAD}}$ est comprise entre 0 et 180.

Donc $\widehat{\mathrm{BAD}} = 60$ (car 60 est le seul nombre compris entre 0 et 180 dont le cosinus est égal à $\dfrac{1}{2}$).

2°) Calculer $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)^2$; en déduire AC. S'il reste du temps à la fin, vérifier le résultat sur une figure.

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\left(\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AD}^2 \quad \text{(identité remarquable scalaire)}$$

$$= 25 + \cancel{2} \times \frac{15}{\cancel{2}} + 9$$

$$= 49$$

Comme ABCD est un parallélogramme par hypothèse, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

On a donc $\overrightarrow{AC}^2 = 49$, soit $AC^2 = 49$.

On en déduit que $AC = 7$.

III.

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère un pavé droit ABCDEFGH. On note I centre de la face ADHE et J le milieu du segment $[GH]$.

Partie 1

Dans cette partie, on suppose que $AB = 3$ et $AD = AE = 2$.

1°) Compléter la deuxième colonne du tableau ci-dessous en écrivant la valeur de chaque produit scalaire.

$p_1 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{JH}$	$p_1 = -\dfrac{9}{2}$
$p_2 = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{DE}$	$p_2 = 0$
$p_3 = \overrightarrow{JH} \bullet \overrightarrow{JG}$	$p_3 = -\dfrac{9}{4}$

● Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{JH}$ sont colinéaires et de sens contraires.

● Le quadrilatère ADHE est un carré donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont orthogonaux.

● Les vecteurs $\overrightarrow{JH}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont colinéaires et de sens contraires.

2°) Compléter la deuxième colonne du tableau ci-dessous de la manière suivante :

- dans la deuxième colonne, écrire un produit scalaire égal en utilisant un projeté orthogonal bien choisi ;

- dans la troisième colonne écrire le résultat du produit scalaire.

$p_4 = \overrightarrow{\mathrm{EJ}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{EH}}$	$p_4 = \overrightarrow{\mathrm{EH}}^2$	$p_4 = 4$
$p_5 = \overrightarrow{\mathrm{IJ}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AH}}$	$p_5 = \overrightarrow{\mathrm{IH}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AH}}$	$p_5 = 4$
$p_6 = \overrightarrow{\mathrm{ED}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{EA}}$	$p_6 = \overrightarrow{\mathrm{EA}}^2$	$p_6 = 4$

● Calcul de p_4 :

On travaille dans le plan (EFG).
Le projeté orthogonal du point J sur la droite (EH) est le point H.
On a donc $p_4 = \overrightarrow{\mathrm{EH}}^2$.

● Calcul de p_5 :

On travaille dans le plan (ABH).
Le projeté orthogonal du point J sur la droite (AH) est le point H.
On a donc $p_5 = \overrightarrow{\mathrm{IH}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AH}}$.

$p_5 = \overrightarrow{\mathrm{IH}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AH}}$

$= \mathrm{AH} \times \mathrm{IH}$

$= 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ (on utilise la longueur des diagonales d'un carré de côté a)

$= 2 \times 2$

$= 4$

● Calcul de p_6 :

On travaille dans le plan (AED).
Le projeté orthogonal du point D sur la droite (AE) est A.
On a donc $p_6 = \overrightarrow{\mathrm{EA}}^2$.

Partie 2

1°) Dans chaque cas, indiquer si les vecteurs sont orthogonaux. Écrire oui ou non dans la colonne de droite.

$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FJ}$	oui
$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CJ}$	non
$\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$	non

• $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FJ}$

La droite (AE) est orthogonale au plan (ABE). Elle est donc orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan.
Or la droite (FJ) est incluse dans ce plan.
On en déduit que la droite (AE) est orthogonale à la droite (FJ). Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FJ}$ sont orthogonaux.

• $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CJ}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CJ}$ forment un angle géométrique aigu.

• $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas orthogonaux. On peut utiliser le théorème de la projection orthogonale d'un angle droit sur un plan ou calculer le produit scalaire de ces deux vecteurs (on trouve 4, résultat non nul, qui prouve que les vecteurs ne sont pas orthogonaux).

2°) Entourer la réponse exacte :

• L'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ est le plan :

(ADH) (BCG) (ABE)

• L'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ est le plan :

(BDF) (ACH) (BEF)