TS spé

Suites de matrices unicolonnes vérifiant une relation de récurrence de la forme $X_{n+1} = AX_n$

Plan du chapitre :

• Dans ce chapitre, nous travaillons avec des matrices carrées et nous nous intéressons aux puissances d'exposant entier naturel.

• Nous mentionnerons quelques résultats à connaître.

• Nous évoquerons également à plusieurs reprises le cas de l'exposant – 1 qui correspond à l'inverse.

Suites de matrices

Redonner définition suite périodique et stationnaire.

On dit qu'une suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (toutes de même format) est stationnaire **à partir de l'indice n_0** pour exprimer que : $\forall n \geqslant n_0 \quad U_n = U_{n+1}$.

On dit qu'une suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (toutes de même format) est **périodique** lorsqu'il existe un entier naturel $p \neq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+p} = U_n$.

• Le plus petit entier naturel p qui vérifie la propriété est appelé **la période** de la suite.

• Une suite périodique de période 1 est une suite constante.

• Pour les matrices, on peut parler de suite périodique, de suite stationnaire mais pas de suite monotone.

I. Généralités

1°) Notations

m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 1.

On considère une matrice A carrée d'ordre m et une matrice X_0 unicolonne à m lignes.

On s'intéresse à la suite (X_n) de matrices unicolonnes à m lignes définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme X_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$.

2°) Exemple

On prend $m = 2$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices unicolonnes à 2 lignes définie par son premier terme X_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$.

On peut calculer les premiers termes.

$X_1 = AX_0$ $= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}$	$X_2 = AX_1$ $= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 27 \\ 38 \end{pmatrix}$	$X_3 = AX_2$ $= \ldots$

On peut aussi utiliser la commande $\boxed{\text{rép}}$ de la calculatrice (modèles TI), comme pour une suite numérique réelle.

On commence par rentrer les matrices A et X_0 (A aura pour nom [A] et X_0 aura pour nom [B]).

On effectue ensuite les calculs.
On sait que X_1 est donnée par $X_1 = AX_0$. On tape $[A]*[B]$.

On sait que X_2 est donnée par $X_2 = AX_1$. On effectue donc le calcul de la manière suivante : $[A]*$Rép (on utilise la commande « rép » pour introduire X_1).

On sait que X_3 est donnée par $X_3 = AX_2$.
On effectue donc le calcul de la manière suivante $[A]*$Rép (on utilise la commande « rép » pour introduire X_2).

On obtient les termes de la suite les uns après les autres.

II. Expression du terme général

On s'intéresse à la suite (X_n) de matrices unicolonnes à *m* lignes définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme X_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$.

On cherche à exprimer X_n en fonction de *n*.

$$X_1 = AX_0$$
$$X_2 = AX_1 = A(AX_0) = A^2X_0$$
$$X_3 = AX_2 = A(A^2X_0) = A^3X_0$$

On démontre aisément par récurrence le résultat fondamental : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^nX_0}$.

Remarques :

• Il s'agit d'une formule analogue à la formule explicite d'une suite géométrique réelle (ou complexe).

• Cette formule permet le calcul de n'importe quel terme de la suite. On peut par exemple s'en servir avec la calculatrice.

• Lorsque l'on connaît l'expression de A^n en fonction de *n*, on peut déterminer l'expression de X_n en fonction de *n*.

Autres formules à connaître :

Comme pour les suites géométriques réelles, il est important de connaître les relations suivantes :

$\boxed{\text{pour tout couple } (n\,;m) \text{ d'entiers naturels tels que } n \geqslant m \quad X_n = A^{n-m}X_m}$.

Lorsque l'on prend $m = 1$, la relation précédente donne : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = A^{n-1}X_1}$.

III. Application à l'étude de suites couplées

1°) Notations

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes u_0 et v_0 ainsi que par les relations de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$ où *a*, *b*, *c*, *d* sont des réels donnés.

On dit que les relations de récurrence définissent des suites couplées.

En pratique, les valeurs numériques des coefficients *a*, *b*, *c*, *d* sont données dans les exercices.

2°) Exemple

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0 = -2$ et $v_0 = 3$ ainsi que par les relations de récurrence $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n - v_n$.

On peut calculer les premiers termes « à la main » ou grâce à la calculatrice.

On rentre la suite (u_n) : $n\text{Min} = 0$, $\text{u}(n) = \text{u}(n-1) + \text{v}(n-1)$, $\text{u}(n\text{Min}) = -2$.

On rentre la suite (v_n) : $\text{v}(n) = \text{u}(n-1) - \text{v}(n-1)$, $\text{v}(n\text{Min}) = 3$.

n	$u(n)$	$v(n)$
0	– 2	3
1	1	– 5
2	– 4	6
3	2	10

3°) Commentaires

• La situation présentée dans ce paragraphe se généralise à 3 suites, 4 suites etc. vérifiant le même type de relation de récurrence.

• Ce type de suites intervient fréquemment dans des problèmes concrets de dynamique de population comme nous le verrons en exercices. Il s'agit d'une modélisation discrète de phénomènes d'évolution.

4°) Retour au cas général : suite de matrices colonnes associée

Le système d'égalités $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$ peut s'écrire matriciellement sous la forme $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad (1)$.

Pour tout entier naturel *n*, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

On pose également $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (matrice carrée d'ordre 2).

Ainsi d'après l'égalité (1), $\forall n\in\mathbb{N}\quad X_{n+1}=AX_n$.

On se ramène à l'étude d'une suite de matrices colonnes (X_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $X_0=\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}$ et la relation de récurrence $\forall n\in\mathbb{N}\quad X_{n+1}=AX_n$.

Commentaire : Plutôt que d'étudier deux suites, on se ramène à l'étude d'une seule suite de matrices colonnes.

On peut alors dire que $\forall n\in\mathbb{N}\quad X_n=A^nX_0$.

Autrement dit $\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}$.

Commentaire : Lorsque l'on connaît l'expression de A^n en fonction de *n*, on peut déterminer l'expression de X_n en fonction de *n* et par conséquent aussi les expressions de u_n et de v_n en fonction de *n*.

5°) Reprise de l'exemple

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}u_0=-2\\v_0=3\end{cases}$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{cases}u_{n+1}=u_n+v_n\\v_{n+1}=u_n-v_n\end{cases}$.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$.

On a en particulier $X_0=\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}$.

On pose également $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$.

On a alors $\forall n\in\mathbb{N}\quad X_{n+1}=AX_n$.
D'après le paragraphe précédent, on peut écrire $\forall n\in\mathbb{N}\quad X_n=A^nX_0$.

L'expression de A^n en fonction de *n* n'est pas très simple (on peut par exemple utiliser le site dcode). Nous nous arrêterons donc là.

IV. Condition nécessaire et suffisante pour obtenir une suite constante

1°) Propriété :

On reprend les notations du 3°).

On rappelle que $\forall n\in\mathbb{N}\quad X_{n+1}=AX_n$.

Propriété :

La suite (X_n) est constante si et seulement si X_0 vérifie $AX_0=X_0$.

Il s'agit d'une propriété analogue à celle étudiée pour les suites numériques réelles.

Démonstration :

• On suppose que la suite (X_n) est constante.
On sait que alors que $\forall n\in\mathbb{N}\quad X_{n+1}=X_n$. On aura en particulier $X_1=X_0$ donc $AX_0=X_0$.

• Réciproquement, on suppose que X_0 est un état stable.
On démontre alors aisément par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}\quad X_n=X_0$ et donc que la suite (X_n) est constante.

Cette notion sera reprise dans le chapitre sur les processus d'évolution et les graphes pondérés avec la notion d'état stable ou stationnaire.

Exercice-type

On pose $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\4 & -1\end{pmatrix}$.

Déterminer X_0 telle que la suite (X_n) soit constante.

On pose $X_0=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ où *x* et *y* sont des réels.

On sait par la propriété précédente que la suite (X_n) est constante si et seulement si $AX_0=X_0\quad(1)$.

$(1)\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & -1\\4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-y=x\\4x-y=y\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x=y\\4x=2y\end{cases}$

$\Leftrightarrow\ y=2x$ (on obtient deux fois la même équation)

La suite (X_n) est constante si et seulement si X_0 est de la forme $\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

4°) Adaptation au cas d'une suite de matrices lignes

Soit A un matrice carrée d'ordre *m* (c'est-à-dire à *m* lignes et *m* colonnes).

On considère la suite (Y_n) de matrices lignes à *m* colonnes définie sur $\mathbb{N}$ par :

• son premier terme Y_0 qui est une matrice ligne à *m* colonnes ;

• la relation de récurrence $\forall n\in\mathbb{N}\quad Y_{n+1}=Y_nA$.

On a alors $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad Y_n=Y_0A^n}$ (expression du terme général).

Il est important de connaître la relation suivante :
$\boxed{\text{pour tout couple } (n\,;m) \text{ d'entiers naturels tels que } n\geqslant m\quad Y_n=Y_mA^{n-m}}$.

Lorsque l'on prend $m=1$, la relation précédente donne : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Y_n = Y_1 A^{n-1}}$.

Retour au cas général : suite de matrices lignes associée

On pose $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ($B =$ transposée de A).

Pour tout entier naturel *n*, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$ ($Y_n =$ transposée de X_n).

La suite (Y_n) est une suite de matrices lignes.

On vérifie immédiatement que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_{n+1} = Y_n B}$ (relation de récurrence).
On a alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_n = Y_0 B^n}$ (expression du terme général).

Il est intéressant de connaître les résultats suivants déjà, donnés dans le paragraphe **VI**.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Y_n = Y_1 B^{n-1}}$

et plus généralement :

$\boxed{\text{pour tout couple } (n\,;m) \text{ d'entiers naturels tels que } n \geqslant m \quad Y_n = Y_m B^{n-m}}$.

VIII. Convergence des puissances d'une matrice carrée

On étend aux matrices la notion de suite convergente.

Définition

On dit qu'une suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (toutes de même format) est convergente vers une matrice L si toutes les suites formées par les coefficients des U_n convergent vers les coefficients de L correspondants.

La matrice L est la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple :

Pour tout entier naturel *n*, on pose $U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n^2+1} \\ 3-\dfrac{1}{n+1} \end{pmatrix}$.

On définit ainsi une suite (U_n) de format 2 × 1 (matrices unicolonnes).

Les suites $\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right)$ et $\left(3-\dfrac{1}{n+1}\right)$ étant convergentes respectivement vers 0 et 3, on dit que la suite de matrices (U_n) est convergente vers $L = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
La matrice L est la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut écrire $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

1°) Introduction

Soit A une matrice carrée d'ordre 2.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

Il n'y a pas de formule pour calculer a_n, b_n, c_n, d_n en fonction de *n*.

On dit que la suite (A^n) converge pour exprimer que les suites réelles (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) convergent.

Si on note α, β, γ, δ leurs limites respectives, alors la matrice $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est appelée la limite de la suite (A^n).

2°) Définition [convergence et limite]

Soit A une matrice carrée d'ordre *m* (où *m* est un entier naturel supérieur ou égal à 1).
On dit que la suite (A^n) converge pour exprimer que chaque coefficient de la matrice A^n converge.

Dans ce cas, la matrice L dont les coefficients sont les limites de ceux de A^n est appelée la limite de la suite (A^n).

On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = L$ ou encore $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

3°) Exemple

On pose $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme A est une matrice diagonale, $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$

Les autres coefficients de A^n sont constants donc convergent.

On en déduit que $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4°) Rappel

Soit q un réel.
On rappelle ci-dessous la règle concernant le comportement de la suite $\left(q^n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$ suivant les valeurs de q.

• Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

• Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

• Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

• Si $q \leqslant -1$, alors q^n n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Il n'y a pas de résultat général analogue pour la suite des puissances d'une matrice carrée.

5°) Propriété (découle des propriétés des limites de suites réelles pour la somme et le produit)

On reprend les notations du **2°)**.
On suppose que la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ converge et on note sa limite L.

• Soit B une matrice rectangulaire à m lignes.
La suite $\left(\mathrm{A}^n\mathrm{B}\right)$ converge vers LB.

• Soit C une matrice rectangulaire à m colonnes.
La suite $\left(\mathrm{CA}^n\right)$ converge vers CL.

6°) Conséquence

Avec les notations du **2°)**, lorsque la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ converge, alors sa limite L vérifie $\mathrm{AL} = \mathrm{LA} = \mathrm{L}$.

7°) Application à la convergence d'une suite de matrices colonnes

On reprend les notations du **VI**.

m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 1.

On considère une matrice A carrée d'ordre m et une matrice X_0 unicolonne à m lignes.

On s'intéresse à la suite $\left(\mathrm{X}_n\right)$ de matrices unicolonnes à m lignes définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme X_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$.

• Propriété 1 :

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$.
Par passage à la limite, on obtient le résultat suivant.

Si la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ converge vers une matrice L, alors la suite $\left(\mathrm{X}_n\right)$ converge la matrice $\mathrm{S} = \mathrm{LX}_0$.

• Propriété 2 :

Par définition de la suite, on sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$.
Par passage à la limite, on obtient le résultat suivant.

Si la suite $\left(\mathrm{X}_n\right)$ converge, alors sa limite S vérifie $\mathrm{AS} = \mathrm{S}$.

8°) Méthodes de conjecture de la limite ; outil de conjecture

• Pour une matrice carrée A donnée, on peut conjecturer la convergence et la limite éventuelle de la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ en calculant les puissances de A pour de grands exposants.

• Lorsque la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ converge, on peut trouver sa limite en utilisant un logiciel de calcul formel (par exemple XCas).

IX. Modélisation discrète de dynamique de populations

Il s'agit d'une étude de phénomènes chronologiques.
L'évolution démographique est un enjeu important pour les politiques publiques. Être capable d'anticiper l'évolution de la population ou son vieillissement permet d'orienter les décisions publiques.

1°) Cas d'une seule population

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right)$

Cas d'équilibre

Cas linéaire ; suite arithmético-géométrique

Un modèle particulier : Verhulst discret

2°) Suites couplées cas d'équilibre

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = f\left(u_n, v_n\right) \\ v_{n+1} = g\left(u_n, v_n\right) \end{cases}$ où f et g sont des fonctions de deux variables (fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).

Conditions initiales ; cas d'équilibre

2 cas particuliers importants seront étudiés en exercices :

- modèle proie-prédateur linéaire discret – matrice proie-prédateur

- modèle de Lotka-Volterra discret

● Malthus (1766-1864)

Il suppose que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à la population (modèle non réaliste).
$f\left(t\right) = ke^{at}$ (modèle continu) ou bien $u_n = C\alpha^n$ (modèle discret).

● Verhulst (1804-1849)

Il précise le modèle de Malthus : la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à la population et aussi à la capacité d'accueil encore disponible pour cette population.

$f\left(t\right) = \dfrac{1}{1+be^{-at}}$ (modèle continu) ou $u_{n+1} = u_n + au_n\left(1 - \dfrac{u_n}{k}\right)$ (modèle discret).

Le 22 février 2024

nomatherror DS4 2023 2024

Pierre Verhulst (mathématicien belge du XIXe siècle) présente les fonctions définies sur le modèle :
$f\left(t\right) = \dfrac{a}{1+\mathrm{e}^{c-bt}}$ où a non nul, b>0 et c sont des constantes réelles définies selon les caractéristiques du milieu étudié.
Ces fonctions permettent de décrire, notamment, l'évolution d'une population vivant dans un milieu clos en fonction du temps écoulé. Comme par exemple le nombre de bactéries dans une boîte à pétri. Ce type de fonction est aussi utile en économie pour modéliser la demande d'un produit.

● Volterra (1860-1940)

Modèle proie-prédateur

Version continue :

$\mathrm{A}\left(t\right)$: nombre de proies à l'instant t
$\mathrm{B}\left(t\right)$: nombre de prédateurs à l'instant t

L'évolution d'une espèce influe sur l'évolution de l'autre.
Modélisation :

On prend en compte les paramètres suivants :
Pour les proies
a : taux de reproduction des proies en l'absence de prédateurs
b : taux de mortalité des proies due aux prédateurs

Pour les prédateurs
d : taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies
c : taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées

$$\begin{cases} \mathrm{A}'\left(t\right) = a\mathrm{A}\left(t\right) - b\mathrm{B}\left(t\right) \times \mathrm{A}\left(t\right) = \mathrm{A}\left(t\right)\left(a - b\mathrm{B}\left(t\right)\right) \\ \mathrm{B}'\left(t\right) = -d\mathrm{B}\left(t\right) + c\mathrm{A}\left(t\right) \times \mathrm{B}\left(t\right) = \mathrm{B}\left(t\right)\left(c\mathrm{A}\left(t\right) - d\right) \end{cases}$$

Version discrète :

Système $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - bx_ny_n \\ y_{n+1} = cy_n - dx_ny_n \end{cases}$ (modèle discret)

Exercices

$\boxed{7}$ On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$ ainsi que par les relations de récurrence (S) $\begin{cases} a_{n+1} = 8a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 9b_n \end{cases}$.

1°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice que l'on définira.

En déduire X_n en fonction de A, X_0 et *n*.

2°) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

c) Déterminer A^n en fonction de *n* par le calcul. Vérifier à l'aide du site « dcode ».

En déduire a_n et b_n en fonction de *n*.

Solution :

$\boxed{7}$

(a_n) et (b_n) : suites définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$ ainsi que par les relations de récurrence (S) $\begin{cases} a_{n+1} = 8a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 9b_n \end{cases}$

Il s'agit de l'étude de suites couplées définies par des relations linéaires.

1°)

Posons $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad AX_n = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8a_n + b_n \\ 2a_n + 9b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= X_{n+1}$$

D'après le cours, on peut aisément exprimer X_n en fonction de A, X_0 et *n* :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$$

3°) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

a) **Calculons P^{-1}.**

Le déterminant de P est égal à $\det P = 1 \times 2 - 1 \times (-1) = 3$.

$\det P \neq 0$ donc P est inversible.

$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (formule du cours)

b) **Démontrons que $A = PDP^{-1}$.**

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -7 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 24 & 3 \\ 6 & 27 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= A$$

c)

Déterminons A^n en fonction de n par le calcul.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = PD^nP^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(produit de 3 matrices)}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\times 7^n & -7^n \\ 10^n & 10^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\times 7^n + 10^n & -7^n + 10^n \\ -2\times 7^n + 2\times 10^n & 7^n + 2\times 10^n \end{pmatrix}$$

On vérifie à l'aide du site « dcode ».

Déduisons-en a_n et b_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ [on écrit X_n]

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\times 7^n + 10^n & -7^n + 10^n \\ -2\times 7^n + 2\times 10^n & 7^n + 2\times 10^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4\times 7^n + 2\times 10^n - 7^n + 10^n \\ -4\times 7^n + 4\times 10^n + 7^n + 2\times 10^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3\times 7^n + 3\times 10^n \\ -3\times 7^n + 6\times 10^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7^n + 10^n \\ -7^n + 2\times 10^n \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_n = 7^n + 10^n \\ b_n = -7^n + 2\times 10^n \end{cases}$.