T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 15 mars 2024

Fiche

30 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(2+\mathrm{e}^{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

II. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-x^2$ si $x<1$ et $f(x)=\ln x$ si $x \geqslant 1$.
Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.

1°) Tracer sur l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction *f*.
Le tracé permet-il de penser que *f* est continue sur $\mathbb{R}$?

……..

2°) Quels sont les antécédents de 1 par *f* ?

………

3°) Écrire une fonction Python d'en-tête `def f(x):` qui prend pour argument un réel *x* et qui renvoie l'image de *x* par *f*. On suppose avoir importé préalablement la fonction `log` de la bibliothèque `math`.

III. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère les fonctions $f : x \mapsto \left(x-\mathrm{E}(x)\right)^2+\mathrm{E}(x)$ et $g : x \mapsto x\times(-1)^{\mathrm{E}(x)}+x^2$ définies sur $\mathbb{R}$.

1°) Tracer leurs représentations graphiques sur l'écran de la calculatrice.
Le tracé permet-il de penser que :

• f est continue sur $\mathbb{R}$? ☐ oui ☐ non

• g est continue sur $\mathbb{R}$? ☐ oui ☐ non

2°) Calculer $g\left(-\pi\right)$. On donnera la valeur exacte.

………….. (une seule égalité)

IV. (7 points : 1°) 4 points + 2 points pour la rédaction, l'orthographe, le soin, les notations… ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x \times \ln\left(x+1\right)$ définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.
On admet que f est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

1°) On pose $I=\left[3\,;4\right]$. Démontrer qu'il existe un unique réel $c \in I$ dont l'image par f est égale à 2.
Rédiger avec le plus grand soin selon le modèle étudié, en écrivant une idée par ligne.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

2°) À l'aide de la calculatrice, encadrer c par deux décimaux consécutifs d'ordre 3.

……………………………………………………………

Consigne donnée à l'oral

II. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points)

1°) On ne répond pas par oui ou non (et l'on ne commence pas une phrase de réponse par oui ou non).

On attend une réponse rédigée sur le modèle :

« Le tracé permet de penser que f est continue sur $\mathbb{R}$. »

ou

« Le tracé permet de penser que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. »

Corrigé de l'interrogation écrite du 15-3-2024

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(2+\mathrm{e}^x\right)$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\underbrace{2+\mathrm{e}^x}_{X}\right) = 2 \\ \lim\limits_{X \to 2} \ln X = \ln 2\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln 2$.

Autre idée (moins bonne) :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\underbrace{\mathrm{e}^x}_{X}\right) = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \ln(2+X) = \ln 2\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln 2$.

On vérifie cette limite graphiquement en traçant la courbe représentative de *f* sur l'écran de la calculatrice.
La courbe admet la droite d'équation $y = \ln 2$ pour asymptote horizontale en $-\infty$.

II.

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1-x^2$ si $x<1$ et $f(x) = \ln x$ si $x \geqslant 1$.
Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.

1°) Tracer sur l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction *f*.
Le tracé permet-il de penser que *f* est continue sur $\mathbb{R}$?

Le tracé permet de penser que *f* est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Quels sont les antécédents de 1 par *f* ?

0 ; e

On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 = 1 \\ x<1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ln x = 1 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x<1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \mathrm{e} \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \mathrm{e}$$

3°) Écrire une fonction Python d'en-tête `def f(x):` qui prend pour argument un réel x et qui renvoie l'image de x par f. On suppose avoir importé préalablement la fonction `log` de la bibliothèque `math`.

1ère proposition :

```
def f(x) :
    if x<1 :
       return 1-x**2
    else:
       return log(x)
```

2e proposition :

```
def f(x) :
    if x<1 :
       y=1-x**2
    else:
       y=log(x)
    return y
```

On aurait pu proposer un script sans écrire de fonction.

```
x=float(input('Entrer le nombre :'))
if x<1 :
print(1-x**2)
else:
print(log(x))
```

III.

On considère les fonctions $f : x \mapsto \left(x - \mathrm{E}(x)\right)^2 + \mathrm{E}(x)$ et $g : x \mapsto x \times (-1)^{\mathrm{E}(x)} + x^2$ définies sur $\mathbb{R}$.

1°) Tracer leurs représentations graphiques sur l'écran de la calculatrice.
Le tracé permet-il de penser que :

• f est continue sur $\mathbb{R}$? ☒ oui ☐ non

• g est continue sur $\mathbb{R}$? ☐ oui ☒ non

La courbe représentative de f est constituée d'arcs de parabole, ou pour mieux dire, la courbe représentative de f est la réunion d'une infinité d'arcs de parabole.

2°) Calculer $g(-\pi)$. On donnera la valeur exacte.

$$g(-\pi) = \pi^2 - \pi \quad \text{(une seule égalité)}$$

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= -\pi \times (-1)^{\mathrm{E}(-\pi)} + (-\pi)^2 \\ &= -\pi \times (-1)^{-4} + \pi^2 \\ &= -\pi \times 1 + \pi^2 \\ &= -\pi + \pi^2 \\ &= \pi^2 - \pi \quad \text{(valeur exacte)} \end{aligned}$$

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x \times \ln(x+1)$ définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On admet que *f* est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

1°) On pose $I = [3 ; 4]$. Démontrer qu'il existe un unique réel $c \in I$ dont l'image par *f* est égale à 2.
Rédiger avec le plus grand soin selon le modèle étudié, en écrivant une idée par ligne.

On utilise la « méthode des 3 C ».

C_1 : *f* est continue sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ (comme produit de fonctions continues sur cet intervalle) donc, par restriction, sur l'intervalle *I*, car $I \subset]0 ; +\infty[$

On peut justifier la continuité de *f* sur $]0 ; +\infty[$ de la manière suivante : La fonction $u : x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0 ; +\infty[$ (fonction de référence). La fonction $v : x \mapsto \ln(x+1)$ est continue sur $]0 ; +\infty[$ (composée de fonctions continues). Par produit, *f* est continue sur $]0 ; +\infty[$.

C_2 : On a $f(3) = \ln 3 \times \ln 4$ et $f(4) = \ln 4 \times \ln 5$.

La calculatrice donne $f(3) = 1{,}523000021...$ et $f(4) = 2{,}231154703...$, ce qui permet de voir que $2 \in [f(3) ; f(4)]$ (autrement dit, 2 est une « valeur intermédiaire »).

C_3 : *f* est <u>strictement</u> croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ donc, par restriction, sur l'intervalle *I*.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer que l'équation qu'il existe un unique réel $c \in I$ dont l'image par *f* est égale à 2.

Les conditions C_1 et C_2 assurent l'existence de ce réel ; la condition C_3 assure son unicité.

Il n'est pas possible de déterminer la valeur exacte de *c*.

Comme les images de 3 et 4 par *f* sont différentes de 2, on peut affirmer que $3 < c < 4$.

2°) À l'aide de la calculatrice, encadrer *c* par deux décimaux consécutifs d'ordre 3.

$$3{,}664 < c < 3{,}665$$

En résolvant l'équation $f(x) = 2$ avec la calculatrice (équation qui s'écrit $\ln x \times \ln(x+1) = 2$), on obtient l'affichage : 3,664557.

Il n'y a aucun moyen de résoudre l'équation de manière exacte.
On ne peut donc pas donner la valeur exacte de *c*.