T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 8 mars 2024

Fiche

30 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………………………………………

Note : ….. / 20

Rappel pour les limites par composition

Exemple :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\left(\dfrac{1}{x}+4\right)}_{X}=4\\ \lim\limits_{X\to 4}\sqrt{X}=2\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x}+4}=2$.

I. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1-x^2\right)$ définie sur l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

II. (4 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point)

1°) On considère les fonctions $u : x \mapsto \ln(2x)$ et $v : x \mapsto \ln(3x)$ définies sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} v(x)$. On ne donnera le détail que pour la première limite.

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(2x)\times\ln(3x)$ définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Justifier.

III. (4 points : 1 point + 2 points + 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+3$ définie sur $\mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

• Recopier et compléter la phrase suivante :

En $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « …… ».

………..

• On pose $P(X) = X^2 - X + 3$.
Déterminer $\lim_{X \to +\infty} P(X)$. Justifier en donnant le nom de la règle utilisée.

………..

• Conclure en observant que pour tout réel x on a : $f(x) = P(e^x)$.

IV. (9 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 3 points ; 6°) 1 point)

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites D et D' définies par les systèmes d'équations paramétriques respectifs $\begin{cases} x = 9 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et $\begin{cases} x = t' + 1 \\ y = 1 - t' \\ z = t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$.

Pour les questions 1°) à 5°), répondre par oui ou non. Dans le cas où la réponse est oui, écrire les coordonnées du point.

1°) Existe-t-il un point de D dont la somme des coordonnées est égale à 1 ? …. ……………

2°) Existe-t-il un point de D' dont la somme des coordonnées est égale à 1 ? …. ……………

3°) Existe-t-il un point de D' dont l'abscisse est égale à la cote ? …. ……………

4°) Les droites D et D' sont-elles parallèles ? ….

5°) Les droites D et D' sont-elles sécantes ? ….

Si oui, préciser les coordonnées du point d'intersection.

………………

6°) On note Δ l'axe des cotes, c'est-à-dire la droite de repère $(O, \vec{k})$.
Quelle est la position relative des droites D et Δ ? Répondre par une phrase sans justifier.

………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 8-3-2024

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1-x^2\right)$ définie sur l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

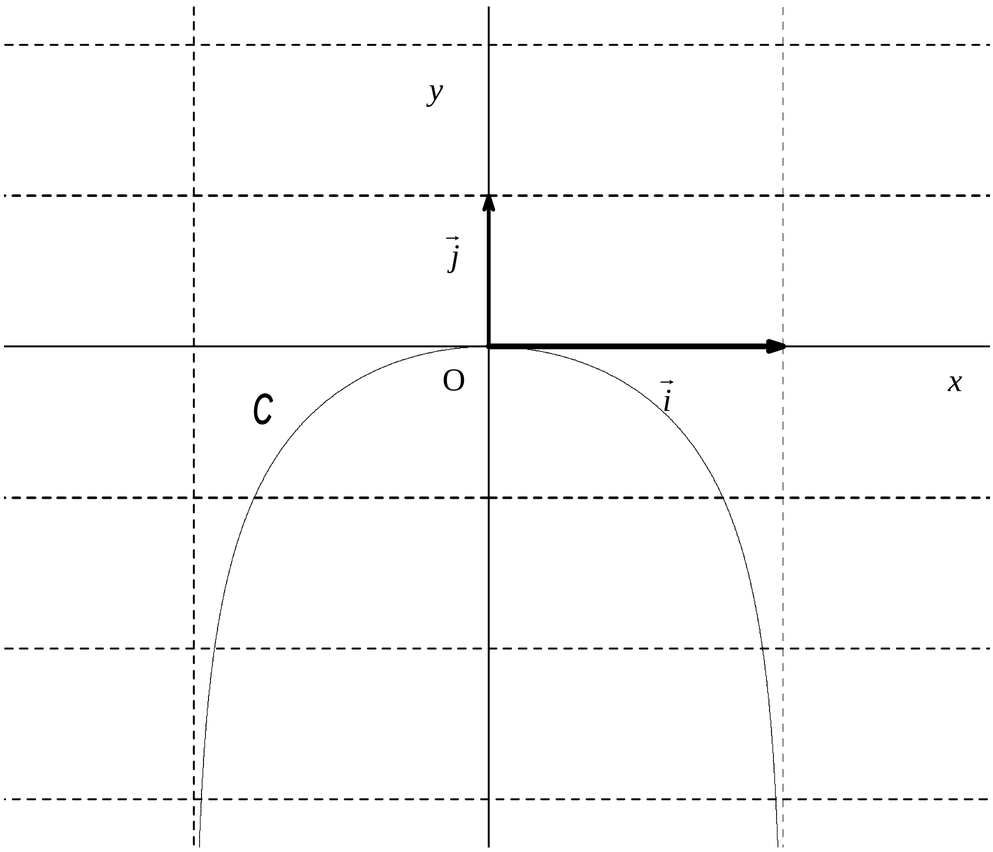
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\underbrace{1-x^2}_{X}\right) = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty .$$

La précision 0^+ est indispensable (pénalité de 1 point en cas d'oubli).

On peut faire le tableau de signes de $1-x^2$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On vérifie cette limite graphiquement en traçant la courbe représentative de *f* sur l'écran de la calculatrice.
La courbe admet la droite d'équation $x = 1$ pour asymptote verticale.



II.

1°) On considère les fonctions $u : x \mapsto \ln(2x)$ et $v : x \mapsto \ln(3x)$ définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} v(x)$. On ne donnera le détail que pour la première limite.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\underbrace{2x}_{X}\right) = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \end{array}\right\}$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = -\infty$.

De la même manière, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} v(x) = -\infty$.

On vérifie ces limites graphiquement en traçant les courbes représentatives de u et v sur l'écran de la calculatrice.
Les courbes admettent l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(2x) \times \ln(3x)$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Justifier.

$\forall x \in]0\,;+\infty[\quad f(x) = u(x)v(x)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} v(x) = -\infty \end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

On vérifie cette limite graphiquement en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.
La courbe admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

Attention, on ne peut pas écrire : $f(x) = \ln(5x)$.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

- Recopier et compléter la phrase suivante :

En $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

- On pose $P(X) = X^2 - X + 3$.

Déterminer $\lim\limits_{X \to +\infty} P(X)$. Justifier en donnant le nom de la règle utilisée.

On a $\lim\limits_{X \to +\infty} P(X) = \lim\limits_{X \to +\infty} X^2 = +\infty$ (on applique la règle des monômes de plus haut degré).

- Conclure en observant que pour tout réel x on a : $f(x) = P\left(\mathrm{e}^{x}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\underbrace{\mathrm{e}^{x}}_{X}\Big)=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}P(X)=+\infty\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

On vérifie cette limite graphiquement en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

Une autre méthode possible pour trouver cette limite serait d'utiliser la réécriture : $f(x)=\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)+3$.

IV.

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les droites D et D' définies par les systèmes d'équations paramétriques respectifs $\begin{cases} x=9+t \\ y=-1+2t \\ z=-3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ et $\begin{cases} x=t'+1 \\ y=1-t' \\ z=t' \end{cases}$ $(t'\in\mathbb{R})$.

Pour les questions 1°) à 5°), répondre par oui ou non. Dans le cas où la réponse est oui, écrire les coordonnées du point.

1°) Existe-t-il un point de D dont la somme des coordonnées est égale à 1 ? non

2°) Existe-t-il un point de D' dont la somme des coordonnées est égale à 1 ? oui $(0\,;2\,;-1)$

3°) Existe-t-il un point de D' dont l'abscisse est égale à la cote ? non

4°) Les droites D et D' sont-elles parallèles ? non

5°) Les droites D et D' sont-elles sécantes ? oui

Si oui, préciser les coordonnées du point d'intersection.

$$(7\,;-5\,;6)$$

6°) On note Δ l'axe des cotes, c'est-à-dire la droite de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{k}\right)$.
Quelle est la position relative des droites D et Δ ? Répondre par une phrase sans justifier.

Les droites D et Δ ne sont pas coplanaires.

1°) Existe-t-il un point de D dont la somme des coordonnées est égale à 1 ?

On cherche s'il existe un réel t tel que $9+t-1+2t-3t=1 \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow 8=1$ impossible (car $9+t-1+2t-3t=8$)

Il n'existe donc pas de point de D dont la somme des coordonnées est égale à 1.

On peut aussi résoudre directement le système $\begin{cases} x=9+t \\ y=-1+2t \\ z=-3t \\ x+y+z=1 \end{cases}$ à l'aide de la calculatrice.

2°) Existe-t-il un point de D' dont la somme des coordonnées est égale à 1 ?

On cherche s'il existe un réel t' tel que $t'+1+1-t'+=1 \quad (2)$.

$(2) \Leftrightarrow t'=-1$ (simplification du membre de gauche : $\cancel{t'}+1+1-\cancel{t'}+t'=1$)

On remplace t' par – 1 dans le système d'équations paramétriques de D' : $\begin{cases} x=-1+1=0 \\ y=1-(-1)=2 \\ z=-1 \end{cases}$.

Le point cherché a donc pour coordonnées $(0\,;2\,;-1)$.

On peut aussi résoudre directement le système $\begin{cases} x=t'+1 \\ y=1-t' \\ z=t' \\ x+y+z=1 \end{cases}$ à l'aide de la calculatrice.

3°) Existe-t-il un point de D' dont l'abscisse est égale à la cote ?

On cherche s'il existe un réel t' tel que $t'+1=t' \quad (3)$.

$(3) \Leftrightarrow 1=0$ impossible

Il n'existe donc pas de point de D' dont l'abscisse est égale à la cote.

On peut aussi résoudre directement le système $\begin{cases} x=t'+1 \\ y=1-t' \\ z=t' \\ x=z \end{cases}$ à l'aide de la calculatrice.

4°) Les droites D et D' sont-elles parallèles ?

La droite D admet le vecteur $\vec{u}\,(1\,;2\,;-3)$ pour vecteur directeur.
La droite D' admet le vecteur $\overrightarrow{u'}\,(1\,;-1\,;1)$ pour vecteur directeur.

On observe que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires.

On peut le dire comme cela car c'est visible immédiatement.

Sinon, on peut aussi en considérant trois déterminants d'ordre 2. L'un des trois déterminants est non nul (en fait il y a un déterminant nul et deux déterminants non nuls).

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\times1-(-3)\times(-1)=3-3=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\times(-1)-2\times1=-1-2=-3$$

$-3\neq0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1-(-3)\times1=1+3=4$$

$4\neq0$

On en déduit que D et D' ne sont pas parallèles.

5°) Les droites D et D' sont-elles sécantes ?

Si oui, préciser les coordonnées du point d'intersection.

Pour répondre à la question, on résout le système (I) $\begin{cases} 9+t=t'+1 & (1) \\ -1+2t=1-t' & (2) \\ -3t=t' & (3) \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de 3 équations à 2 inconnues.

On prend le système formé par deux équations (sous-système).
On regarde ensuite si la troisième équation – celle qui n'a pas été prise dans le système – est vérifiée par les valeurs de t et t'.

On considère le système $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$ (sous-système formé des équations (1) et (3)).
Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.
Il y a donc plusieurs façons de le résoudre : méthode par substitution, méthode par combinaisons, éventuellement méthode matricielle.
En général, la méthode par combinaisons est à privilégier mais ici, la méthode par substitution marche très bien.

En remplaçant t' par $-3t$ dans (1), on obtient $9+t=-3t+1$ qui donne $t=-2$.

(3) donne alors $t'=-3\times(-2)=6$.

On regarde si l'égalité (2) est vérifiée pour $t=-2$ et $t'=6$.

On a $-1+2\times(-2)=-5$ et $1-6=-5$.

L'égalité (2) est donc vérifiée pour $t=-2$ et $t'=6$.

On obtient donc un unique couple solution pour le système (I), ce qui permet d'affirmer que les droites D et D' sont sécantes en un point.

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection, on remplace t par – 2 dans le système d'équations paramétriques de D ou t' par 6 dans le système paramétrique de D'.

On obtient $(7\,;-5\,;6)$.

On peut aussi résoudre directement le système $\begin{cases} x=9+t \\ y=-1+2t \\ z=-3t \\ x=t'+1 \\ y=1-t' \\ z=t' \end{cases}$ à l'aide de la calculatrice.

6°) On note Δ l'axe des cotes, c'est-à-dire la droite de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{k}\right)$.

Quelle est la position relative des droites D et Δ ? Répondre par une phrase sans justifier.

1ère méthode :

À la question 3°), on a dit que la droite D admet le vecteur $\vec{u}\,(1\,;2\,;-3)$ pour vecteur directeur.

Il apparaît de manière évidente que le vecteur $\vec{u}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{k}$ (qui a pour coordonnées $(0\,;0\,;1)$).

Les droites D et Δ ne sont donc pas parallèles.

On cherche ensuite si elles sont sécantes.

On utilise pour cela un système d'équations paramétriques de Δ.

Par définition, Δ passe par O et admet le vecteur $\vec{k}$ pour vecteur directeur.

Un système d'équations paramétriques de Δ s'écrit donc $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t'' \end{cases} \quad (t''\in\mathbb{R})$.

On résout le système (II) $\begin{cases} 9+t=0 \\ -1+2t=0 \\ -3t=t'' \end{cases}$.

En considérant les deux premières équations, on observe immédiatement ue le système n'a pas de solution.

Les droites D et Δ ne sont donc pas sécantes.

Par conséquent, elles sont non coplanaires.

On peut aussi résoudre directement le système $\begin{cases} x = 9 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3t \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = t" \end{cases}$ à l'aide de la calculatrice.

2e méthode :

On utilise la propriété suivante.

Soit D une droite de repère $\left(\mathrm{A}, \vec{u}\right)$.

Soit D' une droite de repère $\left(\mathrm{A}', \vec{u}'\right)$

D et D' sont coplanaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$, $\vec{u}$, $\vec{u}'$ sont coplanaires.

Le point $\mathrm{A}\left(9\,;-1\,;0\right)$ est un point de D.
Le point O est un point de Δ.

On regarde si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AO}}\left(-9\,;1\,;0\right)$, $\vec{u}$, $\vec{k}$ sont coplanaires ou non.

Pour cela, on cherche si l'un peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres ou on calcule le déterminant d'ordre 3 du triplet $\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}, \vec{u}, \vec{k}\right)$ formé par ces trois vecteurs dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de vecteurs de l'espace ($\begin{vmatrix} -9 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ calculé à l'aide de la calculatrice car la formule de calcul d'un déterminant d'ordre 3 n'est pas donnée en terminale).

Calculatrice Numworks

Aller dans la Boîte à outils
Matrices et vecteurs
On rentre la matrice des coordonnées des 3 vecteurs.

$$\begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Cliquer ensuite sur les 3 petits points. On obtient les résultats complémentaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$, $\vec{u}$, $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires, donc les droites D et Δ ne sont donc pas coplanaires.