T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 1er mars 2024

Fiche

30 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

Note : ….. / 20

Dans tous les exercices, on donne une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Dans les exercices **II** et **III**, on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

$f : x \mapsto 2 + \cos x \times \text{e}^x$; $I = \mathbb{R}$.

1°) Sur la feuille annexe, on donne dans le désordre les différentes étapes qui permettent de démontrer par inégalités successives que pour tout réel x on a $2 - \text{e}^x \leqslant f(x) \leqslant 2 + \text{e}^x$.

Remettre les étapes dans l'ordre. On écrira uniquement les numéros sur la ligne ci-dessous.

…………………………………………………………………………

2°) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

II. (8 points : 1°) 2 points + 1 point ; 2°) 2 points + 1 point ; 3°) 2 points)

$f : x \mapsto \ln\left(1 - x^2\right)$; $I =]-1\,;1[$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \in I$, on a $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ et $f''(x) = -2 \times \dfrac{x^2 + 1}{\left(x^2 - 1\right)^2}$ (calculs en colonnes).

……………………………………………… | ………………………………………………

……………………………………………… | ………………………………………………

……………………………………………… | ………………………………………………

……………………………………………… | ………………………………………………

2°) La fonction f est-elle convexe ou concave sur I ? Répondre par des phrases (pas de tableau).

……..

……..

……..

……..

3°) On note Γ la parabole d'équation $y = -x^2$. Le but de cette question est d'étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Γ.

Sur la feuille annexe, on donne dans le désordre les différentes étapes qui permettent de répondre à la question.

Remettre les étapes dans l'ordre. On écrira uniquement les numéros sur la ligne ci-dessous.

……………………………………………………………………………

Tracer Γ sur le graphique donné au verso de la feuille annexe.

III. (8 points : 1°) 2 points + 1 point ; 2°) 1 point + 1 point ; 3°) 2 points + 1 point)

$f : x \mapsto x\mathrm{e}^{1-x}$; $I = \mathbb{R}$.

1°) On donne les égalités suivantes valables pour tout réel x : $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{1-x}$ et $f''(x) = (2-x)\mathrm{e}^{1-x}$.
Justifier que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion A dont on donnera l'abscisse.

……..

……..

……..

……..

……..

2°) On note T la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Compléter les phrases suivantes en donnant chaque fois la valeur exacte :

● L'ordonnée de A est égale à : .

● Le coefficient directeur de T est égal à : .

3°) On admet que T coupe l'axe des abscisses au point $\mathrm{B}(4\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point $\mathrm{C}\left(0\,;\dfrac{4}{\mathrm{e}}\right)$.
Placer les points A, B, C sur le graphique donné au verso de la feuille annexe puis tracer la tangente horizontale et T.
Que représente le point A pour le segment $[\mathrm{BC}]$? Justifier.

……..

……..

……..

Feuille annexe à rendre

Interrogation écrite du vendredi 1er mars 2024

Merci de ne rien écrire sur cette feuille.

I.

1°)

① On en déduit que $2-e^x \leqslant f(x) \leqslant 2+e^x$ pour tout réel $x \in I$.

② Comme e^x est strictement positif, on obtient l'encadrement $-e^x \leqslant e^x \cos x \leqslant e^x$ (2).

③ On peut écrire l'encadrement suivant : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ (1).

④ On obtient l'encadrement $2-e^x \leqslant 2+e^x \cos x \leqslant 2+e^x$, soit $2-e^x \leqslant f(x) \leqslant 2+e^x$ (3).

⑤ On multiplie tous les membres de (1) par e^x.

⑥ On ajoute 2 à tous les membres de (2).

⑦ Soit x un réel quelconque.

II.

1°)

① On sait que pour tout réel u strictement positif, on a $\ln u \leqslant u-1$ (1).

② On peut donc remplacer u par $1-x^2$ dans l'inégalité (1).

③ Comme $x \in I$, on a $1-x^2 > 0$ (2).

④ On obtient l'inégalité $\ln(1-x^2) \leqslant 1-x^2-1$, soit $f(x) \leqslant -x^2$.

⑤ D'après l'inégalité (2), on peut donc affirmer que $\mathcal{C}$ est en dessous de Γ.

⑥ On en déduit que $f(x) \leqslant -x^2$ (2) pour tout réel $x \in I$.

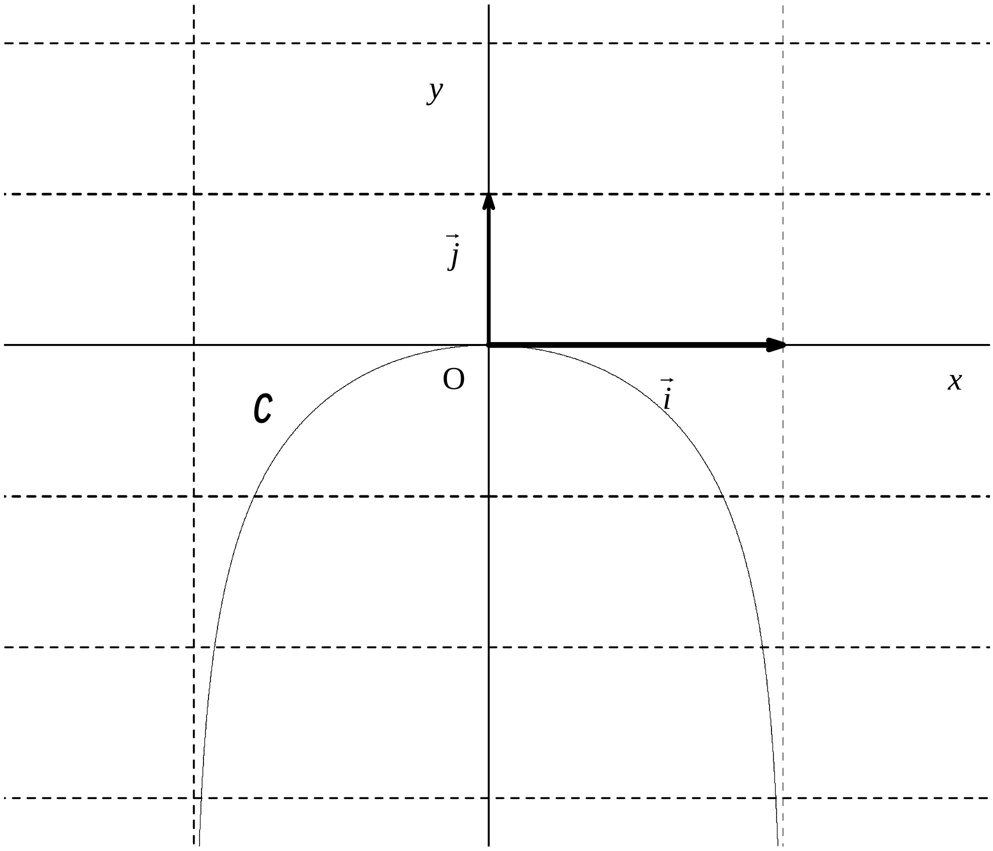
⑦ Soit x un réel quelconque dans I.

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………….

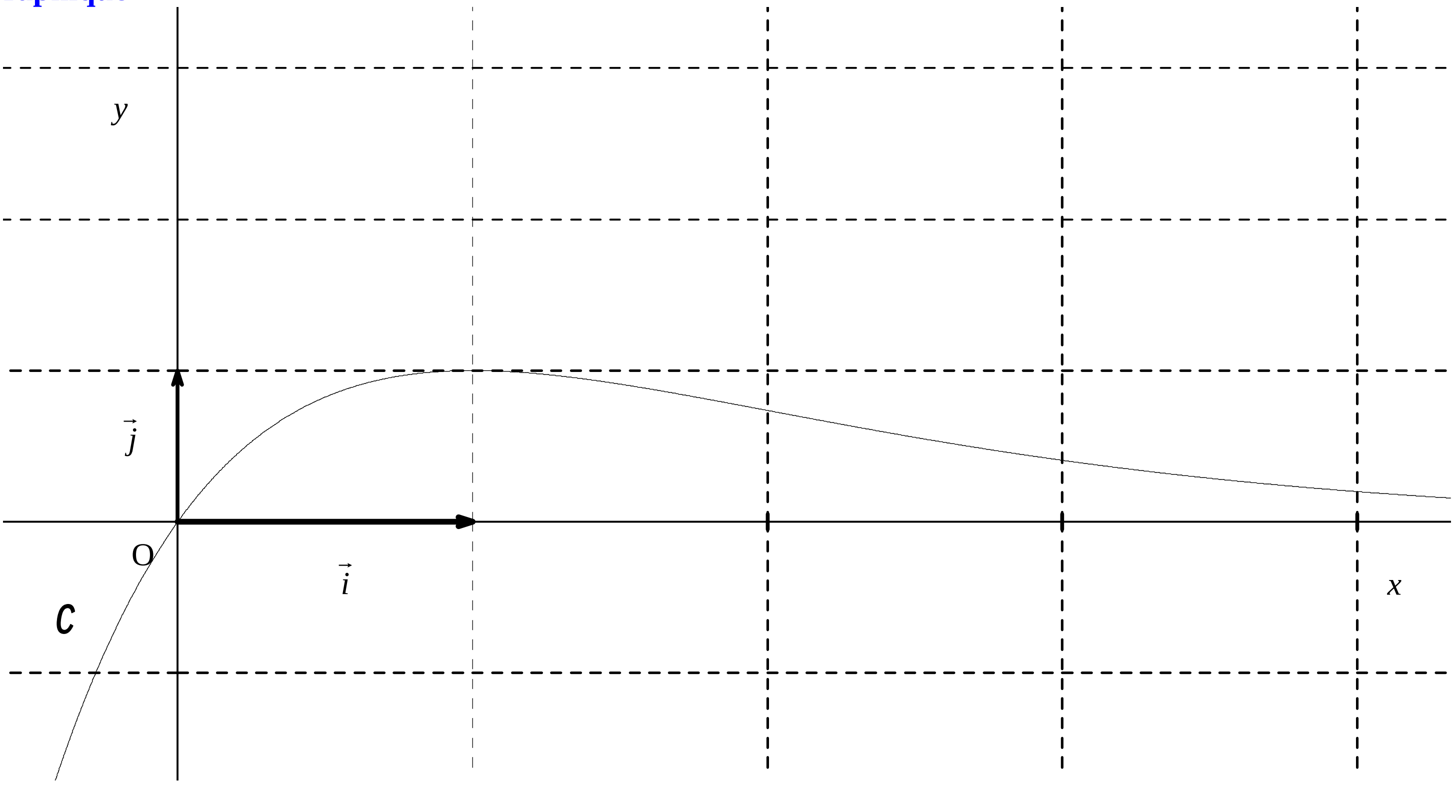
II.

Graphique



III.

Graphique



Consignes données à l'oral

Ensemble de l'interrogation écrite : pas de symbole d'équivalence.

I.

2°) Limites : ne pas oublier les parenthèses lorsque c'est utile (en particulier dans le cas de sommes ou de produits).
Par exemple, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \dfrac{1}{x} \right) = +\infty$.

II.

1°) Calculs de dérivées : appliquer les formules en situation.
On n'écrira pas de formule du type $(\ln u)' = \ldots$.

3°) Tracé de la parabole à main levée bien évidemment.

III.

3°)

Tangente horizontale représentée sous la forme d'une double flèche.

Corrigé de l'interrogation écrite du 1-3-2024

Dans tous les exercices, on donne une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Dans les exercices **II** et **III**, on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I.

$f : x \mapsto 2+\cos x \times \mathrm{e}^x$; $I=\mathbb{R}$.

1°) Sur la feuille annexe, on donne dans le désordre les différentes étapes qui permettent de démontrer par inégalités successives que pour tout réel x on a $2-\mathrm{e}^x \leqslant f(x) \leqslant 2+\mathrm{e}^x$.

Remettre les étapes dans l'ordre. On écrira uniquement les numéros sur la ligne ci-dessous.

⑦ ③ ⑤ ② ⑥ ④ ①

2°) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\mathrm{e}^x\right)=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\mathrm{e}^x\right)=2\end{array}\right\} \text{ donc d'après le théorème des gendarmes, } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2.$$

On vérifie le résultat graphiquement sur la calculatrice.

II.

$f : x \mapsto \ln\left(1-x^2\right)$; $I=\left]-1\,;1\right[$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \in I$, on a $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$ et $f''(x)=-2\times\dfrac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}$ (calculs en colonnes).

$$\forall x \in I \quad f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}$$

$$=\frac{2x}{x^2-1}$$

Pour calculer la dérivée seconde, on effectue la réécriture : $f'(x)=2\times\dfrac{x}{x^2-1}$.

Le fait de séparer le 2 permet d'alléger le calcul de la dérivée seconde.

$$\forall x\in I \quad f''(x)=2\times\frac{1\times\left(x^2-1\right)-x\times 2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$=2\times\frac{x^2-1-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$=2\times\frac{-x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$=-2\times\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}$$

2°) La fonction *f* est-elle convexe ou concave sur *I* ? Répondre par des phrases (pas de tableau).

On observe que $\forall x\in I \quad f''(x)\leqslant 0$.
On en déduit que *f* est concave sur *I*.

On voit bien sur le graphique que *f* est concave.

On a même $\forall x\in I \quad f''(x)<0$. On en déduit que *f* est strictement concave sur *I*.

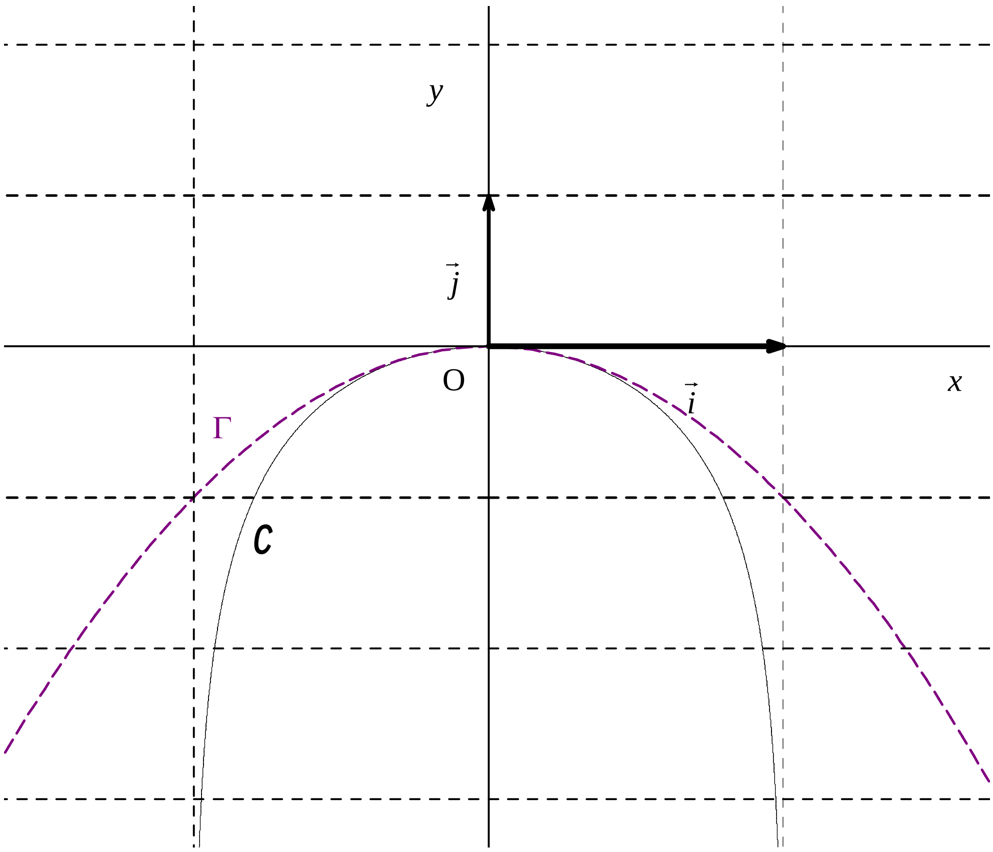
3°) On note Γ la parabole d'équation $y=-x^2$. Le but de cette question est d'étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Γ.

Sur la feuille annexe, on donne dans le désordre les différentes étapes qui permettent de répondre à la question.

Remettre les étapes dans l'ordre. On écrira uniquement les numéros sur la ligne ci-dessous.

⑦ ① ③ ② ④ ⑥ ⑤

On effectue le tracé de Γ à main levée.
La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Γ passe par les points de coordonnées $(-1\,;-1)$ et $(1\,;-1)$.



III.

$f : x \mapsto x\mathrm{e}^{1-x}$; $I = \mathbb{R}$.

1°) On donne les égalités suivantes valables pour tout réel x : $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{1-x}$ et $f''(x) = (2-x)\mathrm{e}^{1-x}$.
Justifier que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion A dont on donnera l'abscisse.

On utilise la dérivée seconde de *f*.

Le signe de $f''(x)$ est donné par le signe de $2-x$.

f vérifie les conditions suivantes :

C_1 : f'' s'annule pour $x = 2$;

C_2 : f'' change de signe pour $x = 2$.

$\mathcal{C}$ admet donc le point A d'abscisse 2 pour point d'inflexion.

On peut utiliser l'astuce de la calculatrice pour vérifier en résolvant l'équation. Pour connaître la valeur d'annulation de la dérivée seconde, on pourrait utiliser la calculatrice : $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(t\mathrm{e}^{1-t}\right)\right|_{t=x} = 0$.

2°) On note T la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Compléter les phrases suivantes en donnant chaque fois la valeur exacte :

• L'ordonnée de A est égale à : $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

• Le coefficient directeur de T est égal à : $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

L'ordonnée de A est égale à $f(2)$ (image de 2 par f).

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{A}} &= f(2) \\ &= 2\mathrm{e}^{1-2} \\ &= 2\mathrm{e}^{-1} \\ &= 2\times\frac{1}{\mathrm{e}} \\ &= \frac{2}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

Le coefficient directeur de T est égal à $f'(2)$ (nombre dérivé de f en 2).

$$\begin{aligned} f'(2) &= (1-2)\mathrm{e}^{1-2} \\ &= -\,\mathrm{e}^{-1} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

3°) On admet que T coupe l'axe des abscisses au point $\mathrm{B}(4\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point $\mathrm{C}\left(0\,;\dfrac{4}{\mathrm{e}}\right)$.
Placer les points A, B, C sur le graphique donné au verso de la feuille annexe puis tracer la tangente horizontale et T.
Que représente le point A pour le segment $[\mathrm{BC}]$? Justifier.

Les points B et C d'intersection de T respectivement avec l'axe des abscisses et des ordonnées s'obtiennent aisément avec l'équation réduite de la tangent : $y=\dfrac{4-x}{\mathrm{e}}$.

Avec la calculatrice, on obtient $\dfrac{4}{\mathrm{e}}=1,47151776...$. On place alors le point C de manière approchée.
On trace T en joignant les points B et C.

On trace la tangente horizontale au point d'abscisse 1 (valeur d'annulation de la dérivée première).

On a $\begin{cases} \dfrac{x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{C}}}{2}=\dfrac{4+0}{2}=2=x_{\mathrm{A}} \\ \dfrac{y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{C}}}{2}=\dfrac{0+\frac{4}{\mathrm{e}}}{2}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}=y_{\mathrm{A}} \end{cases}$.

On en déduit que A est le milieu du segment $[BC]$.