T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 9 février 2024

Fiche

30 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

……………………………………

…………………………………… } ……………………………………………………………………………………………

II. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - 4x^3 + 2x$ définie sur $\mathbb{R}$.

À quelle famille de fonctions la fonction *f* appartient-elle ?
Répondre par une phrase sur le modèle suivant à recopier et compléter : « *f* est une ………. ».

……..

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ sans transformer l'expression de *f*.

……..

Écrire l'énoncé précis de la règle utilisée dans le cadre ci-dessous :

……

……

III. (14 points : 1°) 2 points + 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 2 points)

Dans cet exercice, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Pour toutes les questions, sauf la question 4°), on demande de cocher les réponses choisies.

1°) On donne les vecteurs $\vec{u}\,(2\,;2\,;1)$, $\vec{v}\,(-2\,;-2\,;1)$, $\vec{w}\,(8\,;8\,;2)$.

Cocher les réponses choisies. Justifier ensuite sur les lignes en dessous du tableau.

□ $\vec{u}+\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{w}$.	□ $\vec{u}+\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{k}$.
□ $\vec{v}+\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u}$.	□ $\vec{v}+\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{k}$.
□ $\vec{u}+\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{v}$.	□ $\vec{u}+\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{k}$.

………..

………..

………..

………..

2°) On donne les points $\mathrm{A}(5\,;-8\,;-1)$ et $\mathrm{B}(-1\,;0\,;1)$.

Le milieu de $[\mathrm{AB}]$ appartient au plan :

□ $(x\mathrm{O}y)$ □ $(y\mathrm{O}z)$ □ $(z\mathrm{O}x)$

On rappelle que :

- le plan $(x\mathrm{O}y)$ désigne le plan de repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$;
- le plan $(y\mathrm{O}z)$ désigne le plan de repère $(\mathrm{O}, \vec{j}, \vec{k})$;
- le plan $(z\mathrm{O}x)$ désigne le plan de repère $(\mathrm{O}, \vec{k}, \vec{i})$.

Justifier par une égalité :

………..

3°) On note P le plan d'équation $y=2$.

P est parallèle au plan :

□ $(x\mathrm{O}y)$ □ $(y\mathrm{O}z)$ □ $(z\mathrm{O}x)$

4°) On reprend les notations des questions 2°) et 3°).

Soit C le point de P dont l'abscisse est égale à la cote de A et dont la cote est égale à l'abscisse de B.

C a pour coordonnées : …………………….. .

5°) On reprend les notations de la question 1°).

Soit Q le plan de repère $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

□ L'axe $(\mathrm{O}x)$ est inclus dans Q. □ L'axe $(\mathrm{O}y)$ est inclus dans Q. □ L'axe $(\mathrm{O}z)$ est inclus dans Q.

Question supplémentaire à l'exercice III

On reprend les notations de la question 1°).

À l'aide de la calculatrice, donner la valeur du déterminant du triplet $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$? Le résultat était-il prévisible ?

Corrigé de l'interrogation écrite du 9-2-2024

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient, } \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty .$$

La précision 0^+ (et pas juste 0) pour la limite de x^2 quand $x \to 0$ est importante : elle permet de dire que le résultat est $+\infty$.

pénalité : – 1 point en cas d'oubli.

On vérifie graphiquement le résultat de cette limite en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - 4x^3 + 2x$ définie sur $\mathbb{R}$.

À quelle famille de fonctions la fonction f appartient-elle ?
Répondre par une phrase sur le modèle suivant à recopier et compléter : « f est une ………. ».

f est une fonction polynôme (de degré 3).

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ sans transformer l'expression de f.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-4x^3\right) = -\infty$$

Écrire l'énoncé précis de la règle utilisée dans le cadre ci-dessous :

La limite d'une fonction polynôme non nulle $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à celle de son monôme de plus haut degré.

On vérifie graphiquement le résultat de cette limite en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

III.

Dans cet exercice, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Pour toutes les questions, sauf la question 4°), on demande de cocher les réponses choisies.

1°) On donne les vecteurs $\vec{u}\left(2\,;2\,;1\right)$, $\vec{v}\left(-2\,;-2\,;1\right)$, $\vec{w}\left(8\,;8\,;2\right)$.
Cocher les réponses choisies. Justifier ensuite sur les lignes en dessous du tableau.

☐ $\vec{u}+\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{w}$.	☒ $\vec{u}+\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{k}$.
☒ $\vec{v}+\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u}$.	☐ $\vec{v}+\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{k}$.
☐ $\vec{u}+\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{v}$.	☐ $\vec{u}+\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{k}$.

On a $\vec{v}+\vec{w}\left(6\,;6\,;3\right)$. On peut donc écrire $\vec{v}+\vec{w}=3\vec{u}$. D'après cette égalité, $\vec{v}+\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

On a $\vec{u}+\vec{v}\left(0\,;0\,;2\right)$. On peut donc écrire $\vec{u}+\vec{v}=2\vec{k}$. D'après cette égalité, $\vec{u}+\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{k}$.

2°) On donne les points $\mathrm{A}\left(5\,;-8\,;-1\right)$ et $\mathrm{B}\left(-1\,;0\,;1\right)$.
Le milieu de $\left[\mathrm{AB}\right]$ appartient au plan :

☒ $(x\mathrm{O}y)$ ☐ $(y\mathrm{O}z)$ ☐ $(z\mathrm{O}x)$

On rappelle que :
- le plan $(x\mathrm{O}y)$ désigne le plan de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$;
- le plan $(y\mathrm{O}z)$ désigne le plan de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{j}, \vec{k}\right)$;
- le plan $(z\mathrm{O}x)$ désigne le plan de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{k}, \vec{i}\right)$.

Justifier par une égalité :

Soit I le milieu de $\left[\mathrm{AB}\right]$.

$z_I=\dfrac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}}}{2}=0$ donc $\mathrm{I}\in(x\mathrm{O}y)$

Remarque : Il est inutile de calculer toutes les coordonnées de I [on trouve néanmoins : $\left(2\,;-4\,;0\right)$].

3°) On note P le plan d'équation $y=2$.
P est parallèle au plan :

☐ $(x\mathrm{O}y)$ ☐ $(y\mathrm{O}z)$ ☒ $(z\mathrm{O}x)$

4°) On reprend les notations des questions 2°) et 3°).

Soit C le point de P dont l'abscisse est égale à la cote de A et dont la cote est égale à l'abscisse de B.

C a pour coordonnées : $\left(-1\,;2\,;-1\right)$.

5°) On reprend les notations de la question 1°).

Soit Q le plan de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

☐ L'axe $(\mathrm{O}x)$ est inclus dans Q. ☐ L'axe $(\mathrm{O}y)$ est inclus dans Q. ☒ L'axe $(\mathrm{O}z)$ est inclus dans Q.

Dans la question 1°), on a établi que $\vec{u}+\vec{v}=2\vec{k}$. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est donc un vecteur directeur de l'axe $(\mathrm{O}z)$.

On en déduit que $(\mathrm{O}z)\subset Q$.

Question supplémentaire à l'exercice III

On reprend les notations de la question 1°).

À l'aide de la calculatrice, donner la valeur du déterminant du triplet $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$? Le résultat était-il prévisible ?

Le déterminant du triplet $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est égal à 0.

On en déduit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

Le résultat était prévisible. En effet, on a établi dans la question 1°) que : $\vec{v}+\vec{w}=3\vec{u}$. Cette égalité donne immédiatement $\vec{w}=3\vec{u}-\vec{v}$ (1).

(1) montre que le vecteur $\vec{w}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.