**T spécialité**

# Interrogation écrite du vendredi 26 janvier 2024

Fiche

30 minutes

**Numéro : …..** **Prénom et nom : ……………………………………………………**

**Note : ….. / 20**

---

**I. (6 points : 1°) 4 points ; 2°) 2 points)**

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $f(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$. En déduire la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers + ∞.

……………………………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………………………..

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Interpréter le graphiquement le résultat de cette limite. Rédiger une phrase complète et précise sur le modèle suivant à recopier et compléter : « D'après le résultat de la limite de $f$ en + ∞, la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite …. ».

……………………………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………………………..

---

**II. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)**

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$.

À tout point M de $\mathcal{E}$ on fait correspondre le vecteur $\vec{u} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{CM}}$.

1°) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur constant (c'est-à-dire indépendant de M) qui peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ?

…………………………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………………………..

2°) On note I le milieu de $[BC]$. Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AI}$.

…………………………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………………………..

---

**III. (9 points : 1°) 2 points + 2 points + 2 points ; 2°) 3 points)**

On considère un parallélépipède ABCDEFGH. Soit I un point quelconque de la droite $(AB)$.

1°) Dans cette question, on suppose que I est le symétrique de A par rapport à B.

Citer trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{HG}$. ……… ……… ………

Citer un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{HB}$. ………

Compléter l'égalité : $\overrightarrow{HG} - \overrightarrow{IB} = .....\ \overrightarrow{AB}$. Justifier par un calcul simple.

…………………………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………………………..

2°) Dans cette question, on suppose que I est un point quelconque de la droite $(AB)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{GI}$ sont-ils coplanaires ? Justifier brièvement sans faire aucun calcul vectoriel.

…………………………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………………………..

# Indications données à l'oral

## I.

On admettra la propriété suivante qui sera vue plus tard dans le cadre de la limite d'une composée.

Soit $I$ un intervalle dont la borne de droite est $+\infty$.
Soit $u$ une fonction définie sur $I$ à valeurs positives ou nulles.
Si $u(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$ où $\ell$ est un réel positif ou nul, alors $\sqrt{u(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sqrt{\ell}$.

# Corrigé de l'interrogation écrite du 26-1-2024

**I.**

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $f(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

En déduire la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

$= \dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}$ On force la factorisation sous le radical.

$= \dfrac{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}$

$= \dfrac{|x| \times \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}$ La présence de barres de valeur absolue est indispensable.

$= \dfrac{\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}$ On enlève ensuite les barres de valeur absolue car $x > 0$.

$= \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

On ne peut pas aller plus loin.

Avec la forme initiale de $f(x)$, quand $x$ tend vers $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

On va donc utiliser la forme que l'on vient d'établir.

On applique les propriétés d'opérations algébriques et la limite de la racine carrée d'une fonction.

On part de $\dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ (limite de référence).

On a donc $1+\dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$.

On applique la propriété suivante :

> Soit $I$ un intervalle dont la borne de droite est $+\infty$.
> Soit $u$ une fonction définie sur $I$ à valeurs positives ou nulles.
> Si $u(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$ où $\ell$ est un réel positif ou nul, alors $\sqrt{u(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sqrt{\ell}$.

On en déduit que $\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sqrt{1}$, soit $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Interpréter le graphiquement le résultat de cette limite. Rédiger une phrase complète et précise sur le modèle suivant à recopier et compléter : « D'après le résultat de la limite de $f$ en $+\infty$, la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite …. ».

D'après le résultat de la limite de $f$ en $+\infty$, la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

On peut vérifier le résultat de cette limite graphiquement en utilisant traçant la représentation graphique de $f$ sur l'écran de la calculatrice.

---

## II.

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$.

À tout point M de $\mathcal{E}$ on fait correspondre le vecteur $\vec{u} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{CM}}$.

1°) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur constant (c'est-à-dire indépendant de M) qui peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ?

$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E} \quad \vec{u} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}$

$= 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}$

$= 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ (relation de Chasles)

$= 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (relation de Chasles sous forme soustractive)

$= 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

> La quantification des égalités avec le « $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E}$ » est indispensable.

La dernière égalité montre que le vecteur $\vec{u}$ est constant et peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
On en déduit que les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont coplanaires.

2°) On note I le milieu de $[\mathrm{BC}]$. Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$.

On reprend le résultat de la question précédente.

On peut écrire $\vec{u}=2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

On peut utiliser un résultat du cours pour les milieux (qui se redémontre aisément avec la relation de Chasles) :
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\overrightarrow{\mathrm{AI}}$.

On a donc $\vec{u}=2\left(2\overrightarrow{\mathrm{AI}}\right)=4\overrightarrow{\mathrm{AI}}$

L'égalité obtenue permet d'affirmer que le vecteur $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$.

---

## III.

On considère un parallélépipède ABCDEFGH. Soit I un point quelconque de la droite $(\mathrm{AB})$.

1°) Dans cette question, on suppose que I est le symétrique de A par rapport à B.

Citer trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{HG}}$. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$

On peut aussi donner le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BI}}$.

Citer un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{HB}}$. $\overrightarrow{\mathrm{GI}}$

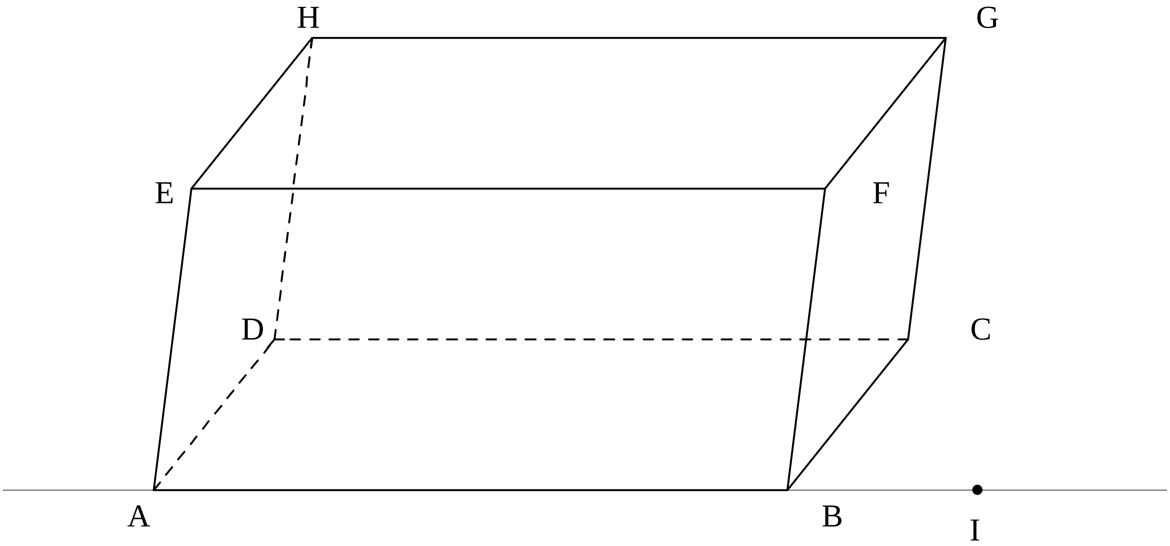
Compléter l'égalité : $\overrightarrow{\mathrm{HG}}-\overrightarrow{\mathrm{IB}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Justifier par un calcul simple.

On a $\overrightarrow{\mathrm{HG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
On a également $-\overrightarrow{\mathrm{IB}}=\overrightarrow{\mathrm{BI}}$.
Or, par hypothèse, I est le symétrique de A rapport par rapport B donc $\overrightarrow{\mathrm{BI}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HG}}-\overrightarrow{\mathrm{IB}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

2°) Dans cette question, on suppose que I est un point quelconque de la droite $(\mathrm{AB})$.
Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ sont-ils coplanaires ? Justifier brièvement sans faire aucun calcul vectoriel.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ sont définis par des points coplanaires.
En effet, les points A, B, G, H, I sont coplanaires.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ sont coplanaires.


H
G
E
F
D
C
A
B
I