T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 17 novembre 2023

Fiche

50 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………… **Note : ….. / 20**

Il est demandé de ne rien écrire ni surligner en dehors des réponses aux questions.

I. (8 points : 1°) 1 point + 2 points + 2 points ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point)

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=-\sqrt{{u_n}^2+1}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Le but de cette question est de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a $u_n=-\sqrt{n}$.
Pour *n* entier naturel quelconque, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n=-\sqrt{n}$ ».
Compléter les pointillés.

• Commençons par démontrer que la phrase $P(0)$ est vraie.
D'une part, on a $u_0=\ldots$ par définition de la suite $\left(u_n\right)$. D'autre part, on a $-\sqrt{\ldots.}=\ldots.$
On peut donc écrire $u_0=\ldots\ldots$, ce qui permet d'affirmer que la phrase $P(0)$ est vraie.

• Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k=-\sqrt{k}$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

On sait que $u_{k+1}=-\sqrt{{u_k}^2+1}$ par la relation de récurrence qui définit la suite $\left(u_n\right)$.
On sait par ailleurs que $u_k=-\sqrt{k}$ par hypothèse de récurrence.
On peut alors exprimer u_{k+1} en fonction de *k* : $u_{k+1}=\ldots\ldots\ldots\ldots$

$=\ldots\ldots\ldots\ldots$

La phrase $P(k+1)$ est donc vraie.

Conclusion : ………..

………..

2°) Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ on pose $P_n=u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$.

a) Calculer P_3. ………….. (une seule égalité, résultat en valeur exacte)

b) Quel est le signe de P_{2023} ?

……………………………………………………………………………….

c) Parmi les expressions suivantes laquelle donne l'expression de $P_n = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$ en fonction de *n* ?
Entourer la réponse choisie.

$-\sqrt{n!}$ $\quad\sqrt{(n+1)!}$ $\quad(-1)^n \sqrt{n!}$ $\quad\sqrt{n!}$ $\quad-\sqrt{(n+1)!}$

II. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - 1$ pour tout entier naturel *n*.

Le but de l'exercice est de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a $u_n > 1$.

Compléter les pointillés.

Pour *n* entier naturel quelconque, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n > 1$ ».

• Commençons par démontrer que la phrase $P(0)$ est vraie.
On a $u_0 = 3$ par définition de la suite (u_n).
On peut donc écrire $u_0 > 1$, ce qui permet d'affirmer que la phrase $P(0)$ est vraie.

• Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k > 1$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} > 1$.

Comme $P(k)$ est vraie, on a $u_k > 1$.
Par passage à la racine carrée, on obtient successivement les inégalités suivantes :
$\sqrt{u_k} > ....$ (passage à la racine carrée)

$2\sqrt{u_k} > ....$ (multiplication des deux membres par 2)

$2\sqrt{u_k} - 1 > ....$ (soustraction de 1 aux deux membres)

On a donc ………, ce qui montre que la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : ………………………..…………………………………………………………………………..

………..

Que peut-on déduire du résultat démontré pour la suite (u_n) ?
Répondre par une phrase bien rédigée en utilisant un terme de vocabulaire précis.

………..

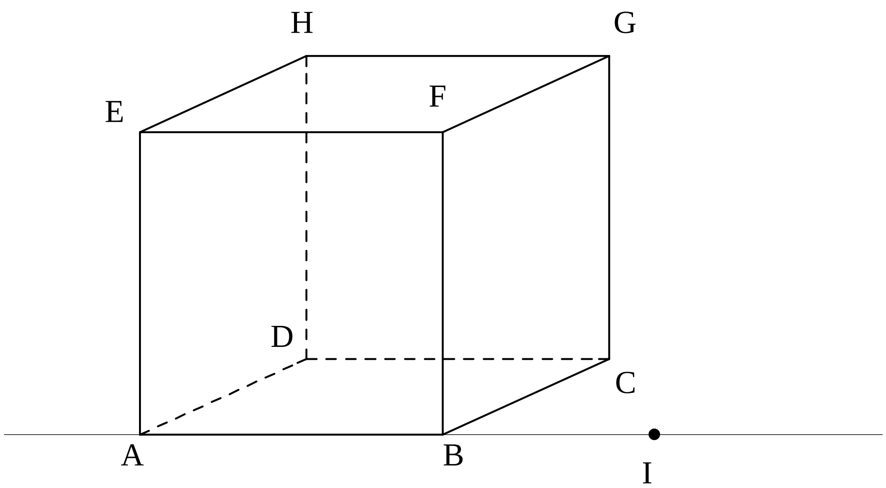
………..

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….……………………………….

III. (7 points : 1°) 1 point par réponse ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point + 1 point)

On considère un cube ABCDEFGH. Soit I un point quelconque de la droite (AB).

Il est demandé de ne rien écrire sur la figure en dehors du tracé de Δ.



1°) Vrai ou faux ? Compléter la colonne de droite avec les lettres V (pour Vrai) et F (pour Faux).

1	Les points A, I, G, H sont coplanaires.	
2	Les droites (GI) et (CH) sont sécantes.	
3	Si I est distinct de B, les droites (GI) et (AH) sont sécantes.	
4	La droite (AC) est parallèle au plan (EGI).	

2°) On suppose que I est distinct de B.
Quelle est la position relative des droites (EI) et (CH) ?

On répondra par une phrase rédigée selon le modèle suivant à recopier : « Les droites (EI) et (CH) sont … ».

…………………………………………………………………………………..…………………………………….……

3°) On note Δ la droite d'intersection des plans (ABC) et (EGI).
Compléter la phrase permettant de définir précisément la droite Δ et tracer Δ sur la figure ci-dessus.

Δ est la droite passant par …. et parallèle à la droite …. .

Justifier sur les lignes au verso. On attend une démonstration correctement rédigée.
On pourra utiliser des symboles en veillant à ce que ce soit de manière correcte et à bon escient.

……

……

……

……

……

Que peut-on dire de la droite Δ lorsque I est confondu avec A ?

On répondra par une phrase rédigée selon le modèle suivant à recopier : « Lorsque I est confondu avec A, la droite Δ est … ».

……

……

4°) **Bonus sur 1 point :**

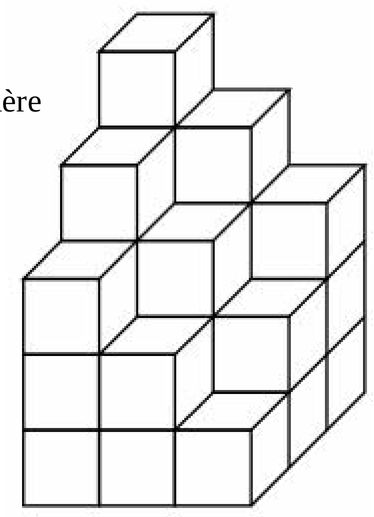
Sur la figure au recto, construire le point d'intersection J de la droite (HI) et du plan (BCG). Laisser apparent les tracés utiles. Expliquer la construction de J.

……

……

IV. (2 points)

En plaçant plusieurs cubes unités, on construit le solide représenté en perspective cavalière sur la figure ci-contre.
Seules les arêtes visibles ont été représentées.
Les arêtes cachées n'ont pas été représentées.



Combien de cubes unités au minimum manque-t-il pour compléter ce solide et obtenir un pavé droit ?

● si on peut bouger les cubes : …..

● si on ne peut pas bouger les cubes : …..

Écrire chaque fois une seule réponse sans faire de phrase.

Corrigé de l'interrogation écrite du 17-11-2023

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = -\sqrt{{u_n}^2 + 1}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Le but de cette question est de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a $u_n = -\sqrt{n}$.
Pour *n* entier naturel quelconque, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = -\sqrt{n}$ ».
Compléter les pointillés.

● Commençons par démontrer que la phrase $P(0)$ est vraie.
D'une part, on a $u_0 = 0$ par définition de la suite (u_n). D'autre part, on a $-\sqrt{0} = 0$.
On peut donc écrire $u_0 = -\sqrt{0}$, ce qui permet d'affirmer que la phrase $P(0)$ est vraie.

● Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k = -\sqrt{k}$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} = -\sqrt{k+1}$.

On sait que $u_{k+1} = -\sqrt{{u_k}^2 + 1}$ par la relation de récurrence qui définit la suite (u_n).
On sait par ailleurs que $u_k = -\sqrt{k}$ par hypothèse de récurrence.

On peut alors exprimer u_{k+1} en fonction de *k* :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= -\sqrt{\left(-\sqrt{k}\right)^2 + 1} \\ &= -\sqrt{k+1} \end{aligned}$$

La phrase $P(k+1)$ est donc vraie.

Conclusion : On a démontré que la phrase $P(0)$ est vraie et que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*, c'est-à-dire que pour tout entier naturel *n* on a $u_n = -\sqrt{n}$.

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on pose $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$.

a) Calculer P_3. $\quad -\sqrt{6}$ (une seule égalité, résultat en valeur exacte)

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

$$\begin{aligned} P_3 &= -\sqrt{1} \times \left(-\sqrt{2}\right) \times \left(-\sqrt{3}\right) \\ &= -\sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ &= -\sqrt{6} \end{aligned}$$

b) Quel est le signe de P_{2023} ?

P_{2023} est strictement négatif.

D'après l'expression de u_n démontrée par récurrence dans la question 1°), tous les termes de la suite sont strictement négatifs à partir de l'indice 1.

P_{2023} est donc le produit de 2023 facteurs tous strictement négatifs.
Par conséquent, P_{2023} est strictement négatifs.

c) Parmi les expressions suivantes laquelle donne l'expression de $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$ en fonction de n ?
Entourer la réponse choisie.

$-\sqrt{n!}$ $\quad$ $\sqrt{(n+1)!}$ $\quad$ $(-1)^n \sqrt{n!}$ $\quad$ $\sqrt{n!}$ $\quad$ $-\sqrt{(n+1)!}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$$

$$= -\sqrt{1} \times \left(-\sqrt{2}\right) \times \ldots \times \left(-\sqrt{n}\right)$$

$$= (-1)^n \sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \ldots \times \sqrt{n}$$

$$= (-1)^n \sqrt{1 \times 2 \times \ldots \times n}$$

$$= (-1)^n \sqrt{n!}$$

N.B. : On peut écrire $P_n = \prod_{k=1}^{k=n} u_k$.

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - 1$ pour tout entier naturel *n*.

Le but de l'exercice est de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a $u_n > 1$.

Compléter les pointillés.

Pour *n* entier naturel quelconque, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n > 1$ ».

• Commençons par démontrer que la phrase $P(0)$ est vraie.
On a $u_0 = 3$ par définition de la suite (u_n).
On peut donc écrire $u_0 > 1$, ce qui permet d'affirmer que la phrase $P(0)$ est vraie.

• Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k > 1$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} > 1$.

Comme $P(k)$ est vraie, on a $u_k > 1$.
Par passage à la racine carrée, on obtient successivement les inégalités suivantes :
$\sqrt{u_k} > 1$ (passage à la racine carrée)

$2\sqrt{u_k} > 2$ (multiplication des deux membres par 2)

$2\sqrt{u_k} - 1 > 1$ (soustraction de 1 aux deux membres)

On a donc $u_{k+1} > 1$, ce qui montre que la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : On a démontré que la phrase $P(0)$ est vraie et que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n on a $u_n > 1$.

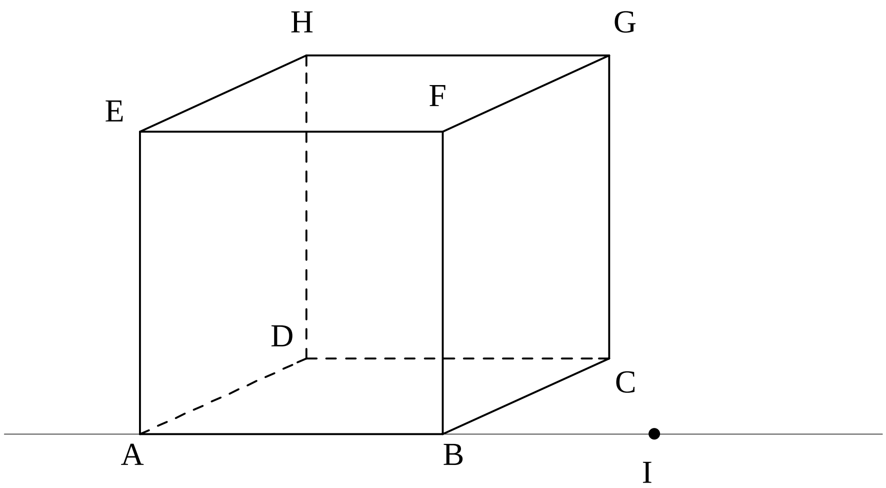
Que peut-on déduire du résultat démontré pour la suite (u_n) ?
Répondre par une phrase bien rédigée en utilisant un terme de vocabulaire précis.

On a démontré que pour tout entier naturel n, on a $u_n > 1$.
On peut donc affirmer que la suite (u_n) est minorée (par 1).

III.

On considère un cube ABCDEFGH. Soit I un point quelconque de la droite (AB).

Il est demandé de ne rien écrire sur la figure en dehors du tracé de Δ.



1°) Vrai ou faux ? Compléter la colonne de droite avec les lettres V (pour Vrai) et F (pour Faux).

1	Les points A, I, G, H sont coplanaires.	V
2	Les droites (GI) et (CH) sont sécantes.	F
3	Si I est distinct de B, les droites (GI) et (AH) sont sécantes.	V
4	La droite (AC) est parallèle au plan (EGI).	V

2°) On suppose que I est distinct de B.
Quelle est la position relative des droites (EI) et (CH) ?

On répondra par une phrase rédigée selon le modèle suivant à recopier : « Les droites (EI) et (CH) sont … ».

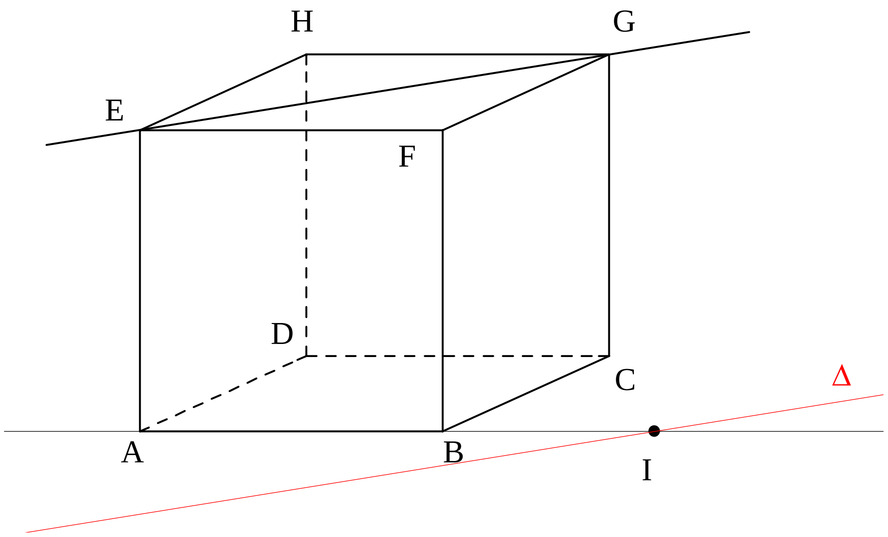
Les droites (EI) et (CH) sont non coplanaires.

Justification :

$I \notin (CEH)$ donc les points C, E, H, I ne sont pas coplanaires.
Par conséquent, les droites (EI) et (CH) sont non coplanaires.

3°) On note Δ la droite d'intersection des plans (ABC) et (EGI).
Compléter la phrase permettant de définir précisément la droite Δ et tracer Δ sur la figure ci-dessus.

Δ est la droite passant par I et parallèle à la droite (EG).



Justifier sur les lignes au verso. On attend une démonstration correctement rédigée.
On pourra utiliser des symboles en veillant à ce que ce soit de manière correcte et à bon escient.

I appartient à la droite (AB).
Or la droite (AB) est incluse dans le plan (ABC).
Par conséquent, I appartient au plan (ABC).
Par ailleurs, I appartient au plan (EGI).
Par conséquent, I est un point commun aux plans (ABC) et (EGI).
On va ensuite justifier que Δ est parallèle à une droite à préciser.

Il y a deux façons de justifier ensuite.

1ère façon :

$(EFG)\cap(EGI)=(EG)$

$(ABC)\cap(EGI)=\Delta$

(ABC) // (EFG) (car ABCDEFGH est un cube et (ABC) et (EFG) sont des plans définis par des faces opposées).
D'après l'un des théorèmes du cours (« Si deux plans parallèles sont coupés par un même plan, alors les droites d'intersection sont parallèles »), on peut affirmer que Δ // (EG).

Δ est donc la droite passant par I et parallèle à (EG).

2e façon :

$(AC)\subset(ABC)$

$(EG)\subset(EGI)$

(AC) // (EG)

Δ est la droite d'intersection des plans (ABC) et (EGI).

Donc, d'après le théorème du toit, Δ est parallèle aux droites (AC) et (EG).

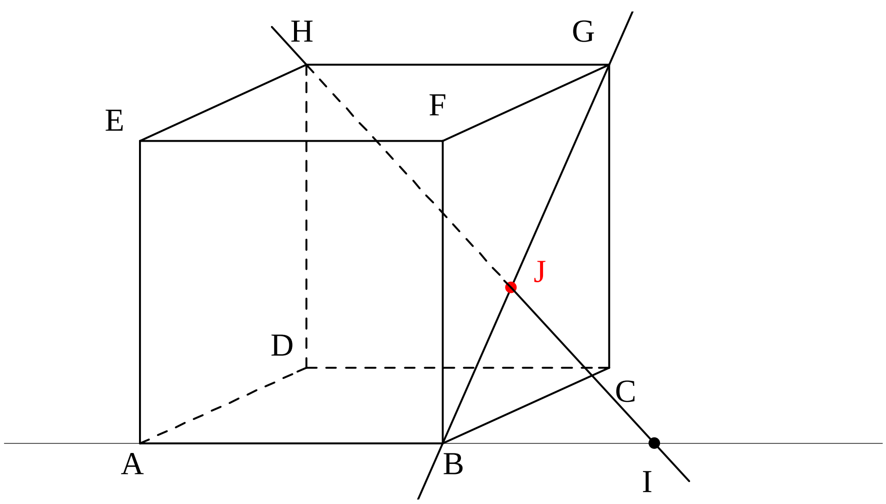
Que peut-on dire de la droite Δ lorsque I est confondu avec A ?

On répondra par une phrase rédigée selon le modèle suivant à recopier : « Lorsque I est confondu avec A, la droite Δ est … ».

Lorsque I est confondu avec A, la droite Δ est confondue avec la droite (AC).

4°) **Bonus sur 1 point :**

Sur la figure au recto, construire le point d'intersection J de la droite (HI) et du plan (BCG). Laisser apparent les tracés utiles. Expliquer la construction de J.



J est le point d'intersection de la droite (BG) et de la droite (CH) (il s'agit de deux droites coplanaires, car contenues dans le plan (ABG), sécantes)

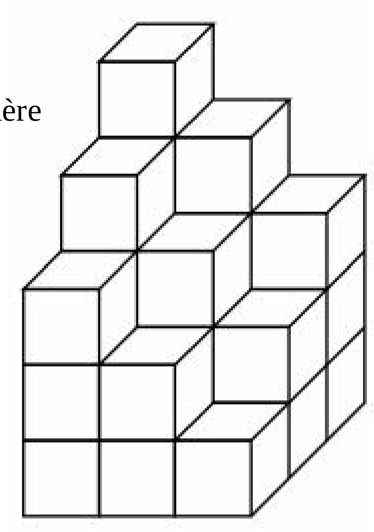
On trace donc la droite (BG).

On marque le point J.

N.B. : Géométriquement, on observe que lorsque I appartient à la demi-droite]Bx), demi-droite ouverte d'origine B ne contenant pas A), I appartient au segment $]BG[$.

IV.

En plaçant plusieurs cubes unités, on construit le solide représenté en perspective cavalière sur la figure ci-contre.
Seules les arêtes visibles ont été représentées.
Les arêtes cachées n'ont pas été représentées.



Combien de cubes unités au minimum manque-t-il pour compléter ce solide et obtenir un pavé droit ?

● si on peut bouger les cubes : 1

● si on ne peut pas bouger les cubes : 18

Écrire chaque fois une seule réponse sans faire de phrase.