T spécialité

Contrôle du mercredi 8 novembre 2023 (2 heures)

- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- L'usage d'une fiche de préparation au format A4 écrite uniquement au verso est également autorisé.
- Dans tous les exercices, sauf dans le **VI**, les différentes questions sont indépendantes les unes des autres.
- On complètera avec soin et sans ratures la feuille de réponses jointe au sujet.
- On rendra uniquement la feuille de réponses dans la copie mais pas le sujet qu'il est demandé de conserver.

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel fixé et par la relation de récurrence $u_{n+1} = nu_n$ pour tout entier naturel n.
Que peut-on dire des termes u_n pour $n \geqslant 1$?

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $v_0 = -1$ et par la relation de récurrence $v_{n+1} = n! - (v_n)^2$ pour tout entier naturel n.
Calculer v_2.

II. (1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 - \dfrac{4}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui permettent de démontrer que la suite (u_n) est bornée.

① On peut écrire l'encadrement suivant : $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1 \quad (1)$.

② Comme -4 est strictement négatif, on obtient l'encadrement $0 > -\dfrac{4}{n} \geqslant -4$ soit $-4 \leqslant -\dfrac{4}{n} < 0 \quad (2)$.

③ On obtient l'encadrement $-1 \leqslant 3 - \dfrac{4}{n} < 3$ soit $-1 \leqslant u_n < 3 \quad (3)$.

④ On en déduit que la suite (u_n) est bornée.

⑤ Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

⑥ On ajoute 3 à tous les membres de (2).

⑦ Comme n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1, l'encadrement (4) est vrai pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

⑧ L'encadrement (3) entraîne $-1 \leqslant u_n \leqslant 3 \quad (4)$.

⑨ On multiplie tous les membres de (1) par -4.

Remettre les phrases dans l'ordre. On écrira uniquement les numéros sur la ligne de la feuille de réponses.
Recopier ensuite sur la copie toute la démonstration avec des phrases.

III. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) Soit x un réel strictement positif quelconque.
Les nombres $\ln x$, $\ln(2x)$, $\ln(4x)$ sont-ils, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ?
Si oui, préciser la raison.

2°) Soit y un réel quelconque.
Les nombres e^{1-y}, e, e^{1+y} sont-ils, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique ?
Si oui, préciser la raison.

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \left(u_n - \frac{3}{2}\right)^2$ pour tout entier naturel n.

1°) Sur le graphique donné sur la feuille annexe, on donne la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.

Effectuer avec soin sur ce graphique, en utilisant la droite Δ (et sans calculs !), la construction des quatre premiers termes de la suite (sur l'axe des abscisses).
Laisser les traits de construction en pointillés apparents.
On n'écrira aucune valeur sur l'axe des abscisses sauf éventuellement celle de u_0. On écrira juste u_0, u_1, u_2, u_3.
On n'écrira rien sur l'axe des ordonnées.

2°) On considère la fonction Python d'en-tête `def terme(n):` dans l'encadré ci-dessous qui prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui renvoie la valeur de u_n.

```
def terme(n):
    u=-1
    for i in range(n):
        ..................
    return u
```

Compléter les pointillés par une instruction de la forme `u=`............ .

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Compléter l'égalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = ...$

2°) Comparer les nombres $\mathrm{A} = -2\mathrm{e}^{-2023}$ et $\mathrm{B} = -2\mathrm{e}^{-2024}$. A … B

3°) Quelle est la solution de l'équation $\ln\left(\mathrm{e}^{2x+1}\right) = \ln\left(2\mathrm{e}^{x}\right) + 1$? ….. (une seule réponse sans égalité)

4°) Donner l'expression d'une primitive G de la fonction $g : x \mapsto 3 + 2\left(\mathrm{e}^{x} - x\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{G}(x) = ...$

VI. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) a) 1 point ; b) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1-x^2\right)$ définie sur l'intervalle $I =]-1\,;1[$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x \in I$.

2°) On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.
Quel est le coefficient directeur de T ?

3°) Quelle est l'abscisse du point B de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente admet pour coefficient directeur 2 ?

4°) On se propose de démontrer que la fonction f admet 0 pour maximum global sur I sans utiliser la dérivée.

a) On commence par démontrer que f est majorée par 0 sur I.

On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui permettent de démontrer ce résultat.

① On peut écrire l'encadrement suivant : $0 \leqslant x^2 < 1 \quad (1)$.
② On en déduit que f est majorée par 0 sur I.
③ On multiplie par – 1 les deux membres de (1).
④ On obtient l'encadrement $0 < 1-x^2 \leqslant 1 \quad (3)$.
⑤ Soit x un réel quelconque dans I.
⑥ Par passage au logarithme népérien, (3) donne l'inégalité $\ln\left(1-x^2\right) \leqslant \ln 1$ soit $f(x) \leqslant 0 \quad (4)$.
⑦ Comme – 1 est strictement négatif, on obtient l'encadrement $0 \geqslant -x^2 > -1$ soit $-1 < -x^2 \leqslant 0 \quad (2)$.
⑧ Comme x un réel quelconque dans I, l'inégalité (4) est vraie pour tout réel $x \in I$.
⑨ On ajoute 1 à tous les membres de (2).
Remettre les phrases dans l'ordre en écrivant uniquement les numéros.

b) Pourquoi peut-on affirmer que f admet 0 pour maximum global sur I ?

5°) On pose $J =]0\,;\pi[$. On considère la fonction g définie sur l'intervalle J par $g(x) = f(\cos x)$.

a) Calculer $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. On donnera la valeur exacte sous la forme la plus simple possible.

b) Démontrer que pour tout réel $x \in J$, on a $g(x) = 2\ln(\sin x)$.

VII. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) On considère les équations $f(x) = f(x+1) \quad (1)$ et $f(x) = f(2x) \quad (2)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Résoudre (1) pour les élèves portant un numéro pair et (2) pour les élèves portant un numéro impair.
On rédigera toute la résolution sur la copie.

2°) À l'aide du logarithme népérien ou décimal, déterminer l'entier naturel n tel que $10^n \leqslant f(2023) < 10^{n+1}$.

Bonus au choix à traiter sur la copie (1 point)

Bonus 1

On reprend la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1-x^2\right)$ définie dans l'exercice **VI**.

Démontrer que l'intervalle $K = \left[-\dfrac{1}{2} ; 0\right]$ est stable par *f*, c'est-à-dire que pour tout réel $x \in K$, $f\left(x\right) \in K$.

Bonus 2

On se place dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Quelle est la nature de l'ensemble *E* des points M de coordonnées $\left(x ; y\right)$ vérifiant l'égalité $\text{e}^{2x} = 3\text{e}^{-y}$?

T spécialité

Contrôle du mercredi 8 novembre 2023
Feuille de réponses

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………….………………………………. **Note : ….. / 20**

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) …..………………………………………..……………………………………………………………….

……………………………………………………..…………………………………………………………….

2°) $v_2 = ...$

II. (1 point)

……………………………………..…………………………………………………………………

Recopier sur la copie toute la démonstration avec des phrases.

III. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) ☐ oui ☐ non raison si la réponse est oui : …….. (une seule réponse sans égalité)

2°) ☐ oui ☐ non raison si la réponse est oui : …….. (une seule réponse sans égalité)

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) au verso

2°) …………….

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

1°) $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = ...$

2°) A .... B

3°) ….. (une seule réponse sans égalité)

4°) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{G}(x) = ...$

VI. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) a) 1 point ; b) 1 point)

1°) $\forall x \in I \quad f'(x) = $……………………..

2°) …… (une seule réponse sans égalité)

3°) …… (une seule réponse sans égalité)

4°) a) …………………………………..…………………………………………………………

b) …..……………………………………..…………..……………………………………………………….

5°) a) $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = $........... (résultat en valeur exacte sous la forme la plus simple possible)

b) …..………………………………………..…..…………………………………………………………….

………………………………………………..……………………………………………………………….

………………………………………………..……………………………………………………………….

………………………………………………..……………………………………………………………….

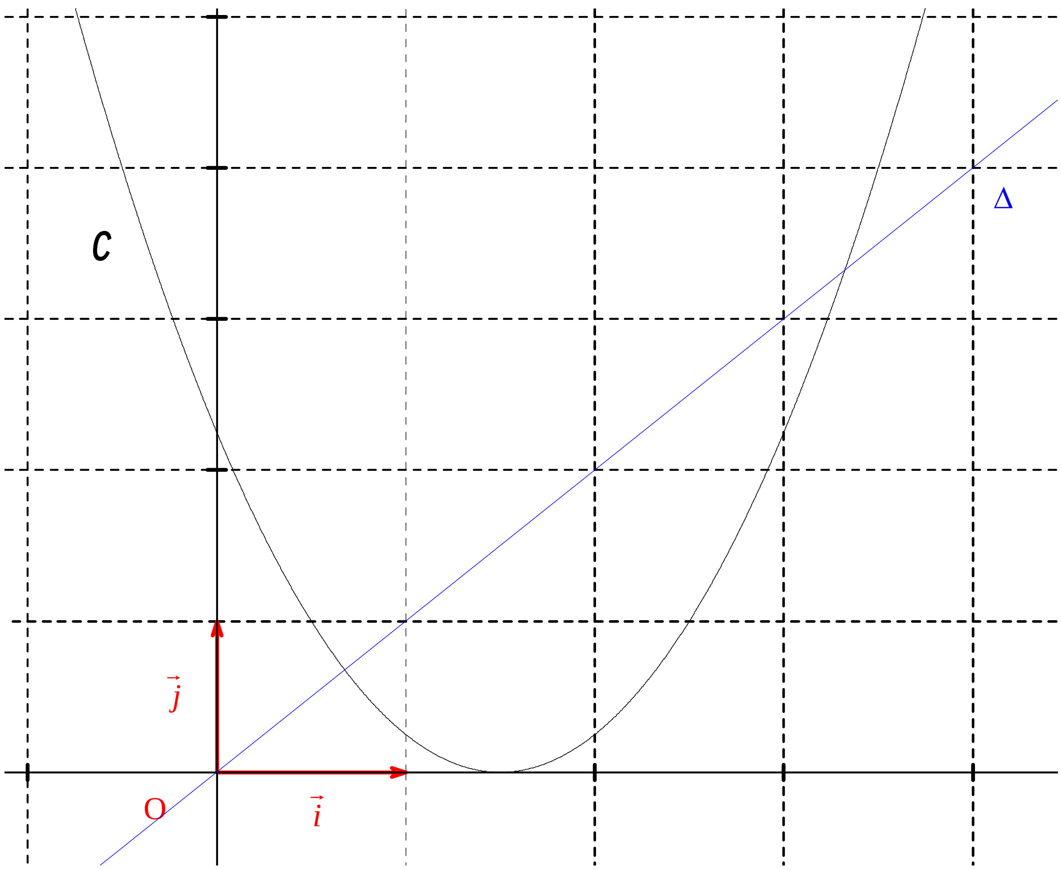
………………………………………………..……………………………………………………………….

VII. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) …… (solution sans égalité)

2°) ………. (une seule égalité)

IV. 1°)



Corrigé du contrôle du 8-11-2023

I.

1°) On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel fixé et par la relation de récurrence $u_{n+1} = nu_n$ pour tout entier naturel n.
Que peut-on dire des termes u_n pour $n \geqslant 1$?

On calcule les premiers termes de la suite.

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \times u_0 \\ &= 0 \times a \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_2 &= 1 \times u_1 \\ &= 1 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_3 &= 2 \times u_2 \\ &= 2 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_4 &= 3 \times u_3 \\ &= 3 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les termes u_n sont tous nuls pour $n \geqslant 1$ (démonstration facile par récurrence).
La suite $\left(u_n\right)$ est stationnaire à partir de l'indice 1.

2°) On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $v_0 = -1$ et par la relation de récurrence $v_{n+1} = n! - \left(v_n\right)^2$ pour tout entier naturel n.
Calculer v_2.

$$\begin{aligned} v_1 &= 0! - \left(v_0\right)^2 \\ &= 0! - \left(-1\right)^2 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_2 &= 1! - \left(v_1\right)^2 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

On peut vérifier en rentrant la suite $\left(v_n\right)$ dans la calculatrice.

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 - \frac{4}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui permettent de démontrer que la suite (u_n) est bornée.

① On peut écrire l'encadrement suivant : $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1 \quad (1)$.

② Comme – 4 est strictement négatif, on obtient l'encadrement $0 > -\frac{4}{n} \geqslant -4$ soit $-4 \leqslant -\frac{4}{n} < 0 \quad (2)$.

③ On obtient l'encadrement $-1 \leqslant 3 - \frac{4}{n} < 3$ soit $-1 \leqslant u_n < 3 \quad (3)$.

④ On en déduit que la suite (u_n) est bornée.

⑤ Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

⑥ On ajoute 3 à tous les membres de (2).

⑦ Comme n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1, l'encadrement (4) est vrai pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

⑧ L'encadrement (3) entraîne $-1 \leqslant u_n \leqslant 3 \quad (4)$.

⑨ On multiplie tous les membres de (1) par – 4.

Remettre les phrases dans l'ordre. On écrira uniquement les numéros sur la ligne de la feuille de réponses.
Recopier ensuite sur la copie toute la démonstration avec des phrases.

⑤ – ① – ⑨ – ② – ⑥ – ③ – ⑧ – ⑦ – ④

III.

1°) Soit x un réel strictement positif quelconque.
Les nombres $\ln x$, $\ln(2x)$, $\ln(4x)$ sont-ils, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ?
Si oui, préciser la raison.

Pour répondre à la question, on peut transformer l'écriture des nombres ou procéder par différence.

1[ère] méthode :

$\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ (propriété fondamentale du logarithme népérien)

$\ln(4x) = \ln 4 + \ln x = 2\ln 2 + \ln x$

On observe que l'on passe de chaque nombre au suivant en ajoutant ln 2 donc les nombres $\ln x$, $\ln(2x)$, $\ln(4x)$ sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison ln 2.

2[e] méthode :

On calcule deux différences.

$$\ln(2x)-\ln x=\ln\frac{2x}{x}=\ln 2$$

$$\ln(4x)-\ln(2x)=\ln\frac{4x}{2x}=\ln 2$$

Les différences sont égales donc les nombres $\ln x$, $\ln(2x)$, $\ln(4x)$ sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison ln 2.

2°) Soit y un réel quelconque.
Les nombres e^{1-y}, e, e^{1+y} sont-ils, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique ?
Si oui, préciser la raison.

Les trois nombres sont non nuls (car il s'agit d'exponentielle et on sait qu'une exponentielle est strictement positive).
On peut procéder par quotient.

$$\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{1-y}}=\mathrm{e}^{1-(1-y)}=\mathrm{e}^{y}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{1+y}}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{1+y-1}=\mathrm{e}^{y}$$

Les deux quotients sont égaux à e^{y} donc les nombres e^{1-y}, e, e^{1+y} sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison e^{y}.

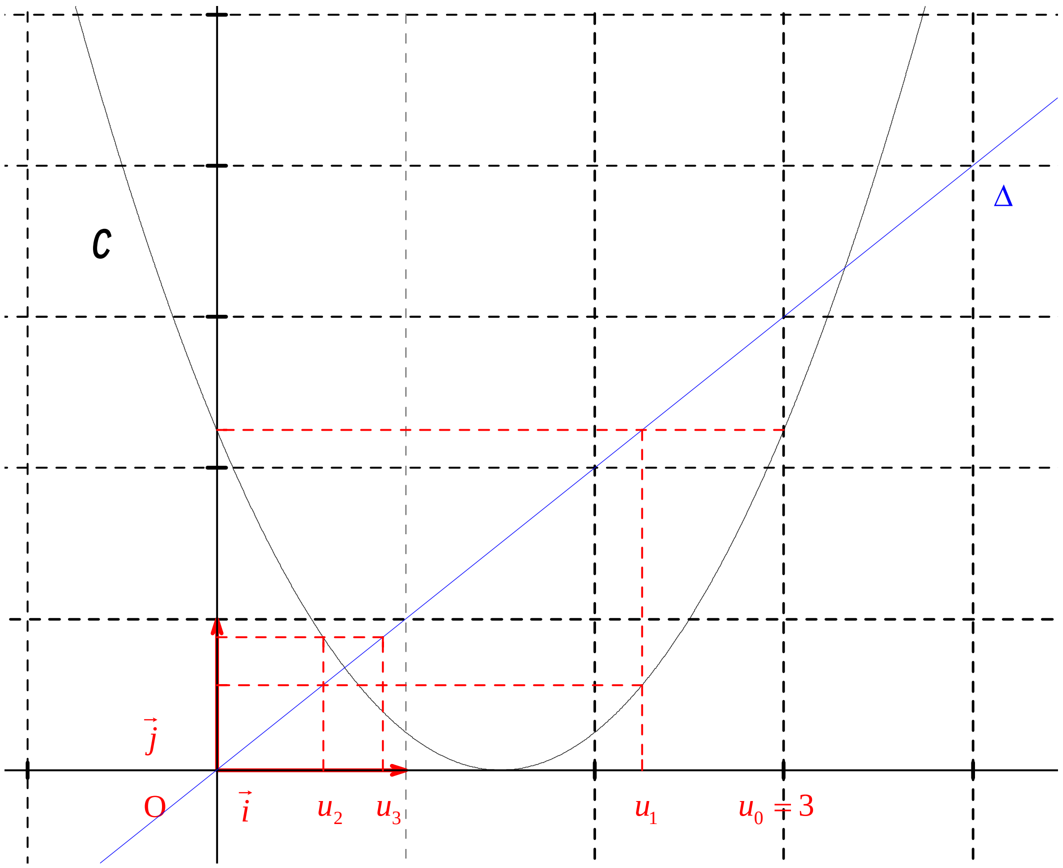
On n'introduit pas de suite (u_n).

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=3$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=\left(u_n-\frac{3}{2}\right)^2$ pour tout entier naturel n.

1°) Sur le graphique donné sur la feuille annexe, on donne la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$.

Effectuer avec soin sur ce graphique, en utilisant la droite Δ (et sans calculs !), la construction des quatre premiers termes de la suite (sur l'axe des abscisses).
Laisser les traits de construction en pointillés apparents.
On n'écrira aucune valeur sur l'axe des abscisses sauf éventuellement celle de u_0. On écrira juste u_0, u_1, u_2, u_3.
On n'écrira rien sur l'axe des ordonnées.



La courbe $\mathcal{C}$ est une parabole de sommet $\text{S}\left(\dfrac{3}{2}\,;0\right)$.

La droite Δ tracée sur le graphique a pour équation $x = y$. Elle permet de « rabattre » les images sur l'axe des abscisses.

Par le calcul, on obtient les valeurs exactes suivantes :
$u_1 = 2{,}25$;
$u_2 = 0{,}5625$;
$u_3 = 0{,}87890625$.

2°) On considère la fonction Python d'en-tête `def terme(n):` dans l'encadré ci-dessous qui prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui renvoie la valeur de u_n.

```
def terme(n):
    u=3
    for i in range(n):
       u=(u-3/2)**2
    return u
```

Compléter les pointillés par une instruction de la forme `u=`............ .

On peut vérifier en réalisant le programme correspondant sur calculatrice.

V.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Compléter l'égalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

$$=\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$=\frac{1+x^2}{1+x^2}$$

$$=1$$

2°) Comparer les nombres $\text{A}=-2\text{e}^{-2023}$ et $\text{B}=-2\text{e}^{-2024}$. $\text{A}<\text{B}$

On a $-2023>-2024$ donc $\text{e}^{-2023}>\text{e}^{-2024}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On multiplie les deux membres de l'inégalité précédente par – 2. Comme – 2 est un réel négatif, on change le sens de l'inégalité.

On a donc $-2\text{e}^{-2023}<-2\text{e}^{-2024}$ soit $\text{A}<\text{B}$.

La calculatrice ne permet pas la comparaison de A et B car leur calcul dépasse les capacités de la calculatrice.
La calculatrice indique juste que A et B sont très proches de 0 (mais ne sont pas égaux à 0 !). Ce sont deux nombres strictement positifs.

Il y a d'autres techniques possibles pour comparer A et B. On peut par exemple écrire que $\text{A}=\text{e}\times\text{B}$.

3°) Quelle est la solution de l'équation $\ln\left(e^{2x+1}\right)=\ln\left(2e^{x}\right)+1$?   ln 2 (une seule réponse sans égalité)

On résout l'équation $\ln\left(e^{2x+1}\right)=\ln\left(2e^{x}\right)+1 \quad (1)$.

L'ensemble de résolution est $\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x+1}\right)=\ln\left(2e^{x}\right)+1 \\
&\Leftrightarrow 2x+\cancel{1}=\ln 2+\ln\left(e^{x}\right)+\cancel{1} \\
&\Leftrightarrow 2x=\ln 2+x \\
&\Leftrightarrow x=\ln 2
\end{aligned}
$$

4°) Donner l'expression d'une primitive G de la fonction $g : x \mapsto 3+2\left(e^{x}-x\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x)=3x+2e^{x}-x^{2}$

On cherche une fonction G dont la dérivée est égale à g.
On commence par développer l'expression de g.

$g(x)=3+2e^{x}-2x$

On procède ensuite terme par terme.
Il est aisé de voir que la fonction $G : x \mapsto 3x+2e^{x}-x^{2}$ a pour dérivée g, donc est une primitive de g.
On peut ajouter une constante quelconque à cette fonction.

VI.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1-x^{2}\right)$ définie sur l'intervalle $I=\left]-1\,;1\right[$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x \in I$.

$$
\begin{aligned}
\forall x \in I \quad f'(x) &= \frac{-2x}{1-x^{2}} \\
&= \frac{2x}{x^{2}-1}
\end{aligned}
$$

On peut vérifier l'ensemble de définition donné dans l'énoncé en résolvant l'inéquation $1-x^{2}>0$ équivalente à $x^{2}<1$. On obtient immédiatement $-1<x<1$.

2°) On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.
Quel est le coefficient directeur de T ?

On calcule le nombre dérivé de f en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On utilise l'expression de la dérivée obtenue à la question précédente.

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-1}$$

$$=\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}-1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$=-2\sqrt{2}$$

Il n'y a pas besoin d'écrire une équation de T.

On vérifie à l'aide la calculatrice (Numworks : boîte à outils, puis rubrique Analyse).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\ln\left(1-\mathrm{x}^2\right)\right)\Big|_{\mathrm{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

On obtient l'affichage : – 2,828427125. Il s'agit d'une valeur approchée de $-2\sqrt{2}$.

3°) Quelle est l'abscisse du point B de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente admet pour coefficient directeur 2 ?

On résout l'équation $f'(x)=2$ avec $x\in I$.

Cette équation s'écrit : $\dfrac{2x}{x^2-1}=2$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2-1}=1$

$\Leftrightarrow x=x^2-1$ (on simplifie les deux membres de l'équation par 2, qui n'est pas nul ; on effectue un produit en croix)

$\Leftrightarrow x^2-x-1=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (utilisation du discriminant : $\Delta=5$)

Grâce à la calculatrice, on observe que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\notin I$ et que $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\in I$.

L'abscisse du point B de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente admet pour coefficient directeur 2 est égale à $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

On vérifie en utilisant la rubrique de résolution des équations.

4°) On se propose de démontrer que la fonction *f* admet 0 pour maximum global sur *I* sans utiliser la dérivée.

a) On commence par démontrer que *f* est majorée par 0 sur *I*.

On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui permettent de démontrer ce résultat.

① On peut écrire l'encadrement suivant : $0 \leqslant x^2 < 1 \quad (1)$.

② On en déduit que *f* est majorée par 0 sur *I*.

③ On multiplie par – 1 les deux membres de (1).

④ On obtient l'encadrement $0 < 1 - x^2 \leqslant 1 \quad (3)$.

⑤ Soit x un réel quelconque dans *I*.

⑥ Par passage au logarithme népérien, (3) donne l'inégalité $\ln\left(1-x^2\right) \leqslant \ln 1$ soit $f(x) \leqslant 0 \quad (4)$.

⑦ Comme – 1 est strictement négatif, on obtient l'encadrement $0 \geqslant -x^2 > -1$ soit $-1 < -x^2 \leqslant 0 \quad (2)$.

⑧ Comme x un réel quelconque dans *I*, l'inégalité (4) est vraie pour tout réel $x \in I$.

⑨ On ajoute 1 à tous les membres de (2).

Remettre les phrases dans l'ordre en écrivant uniquement les numéros.

⑤ - ① - ③ - ⑦ - ⑨ - ④ - ⑥ - ⑧ - ②

b) Pourquoi peut-on affirmer que *f* admet 0 pour maximum global sur *I* ?

5°) On pose $J = \left]0\,;\pi\right[$. On considère la fonction *g* définie sur l'intervalle *J* par $g(x) = f(\cos x)$.

a) Calculer $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. On donnera la valeur exacte sous la forme la plus simple possible.

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \ln\left(1-\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2\right)$$

$$= \ln\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)$$

$$= \ln\left(1-\frac{3}{4}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\ln 4 \quad \text{(propriété logarithme népérien d'un inverse)}$$

$$= -2\ln 2$$

On peut aussi faire le calcul directement grâce à la calculatrice.

b) Démontrer que pour tout réel $x \in J$, on a $g(x) = 2\ln(\sin x)$.

$\forall x \in J \quad g(x) = \ln\left(1-\cos^2 x\right)$

$= \ln\left(\sin^2 x\right)$ (on utilise la relation fondamentale : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

$= 2\ln(\sin x)$ (on utilise la propriété du logarithme népérien d'une puissance ; $\forall x \in J \quad \sin x > 0$)

VII.

On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) On considère les équations $f(x) = f(x+1)$ (1) et $f(x) = f(2x)$ (2) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Résoudre (1) pour les élèves portant un numéro pair et (2) pour les élèves portant un numéro impair.
On rédigera toute la résolution sur la copie.

L'équation (1) s'écrit $x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^{x+1}$.

$(1) \Leftrightarrow x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}$

$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}(x+1)$ (on peut simplifier les deux membres par e^x qui est non nul)

$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}x + \mathrm{e}$

$\Leftrightarrow x(1-\mathrm{e}) = \mathrm{e}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \left\{\dfrac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}}\right\}$

L'équation (2) s'écrit $x\mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^{2x}$.

$(2) \Leftrightarrow x\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow x\left(\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln \mathrm{e}^x = \ln\left(2\mathrm{e}^{2x}\right)$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln 2 + \ln \mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln 2 + \ln \mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln 2 + 2x$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\ln 2$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2 = \{0\,;-\ln 2\}$

2°) À l'aide du logarithme népérien ou décimal, déterminer l'entier naturel *n* tel que $10^n \leqslant f(2023) < 10^{n+1}$.

On a $f(2023) = 2023\mathrm{e}^{2023}$.

$\log f(2023) = \log 2023 + \log \mathrm{e}^{2023} = \log 2023 + 2023 \log \mathrm{e} = 881{,}88373...$

On a donc l'encadrement $881 \leqslant \log f(2023) < 882$ qui entraîne $10^{881} \leqslant f(2023) < 10^{882}$.

L'entier naturel *n* cherché est donc égal à 881.

Bonus au choix

Bonus 1

On reprend la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1-x^2\right)$ définie dans l'exercice **VI**.

Démontrer que l'intervalle $K = \left[-\frac{1}{2}\,;0\right]$ est stable par *f*, c'est-à-dire que pour tout réel $x \in K$, $f\left(x\right) \in K$.

Il y a deux méthodes pour démontrer que l'intervalle *K* est stable par *f*.

1$^{\text{ère}}$ méthode : On procède par inégalités successives.

Soit *x* un réel quelconque dans *K*.

On a donc $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0$.

On obtient immédiatement par passage au carré : $0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{1}{4}$.

On multiplie ensuite tous les membres de la double inégalité précédente par – 1. Comme – 1 est un réel négatif, toutes les inégalités changent de sens.

On obtient alors $0 \geqslant -x^2 \geqslant -\frac{1}{4}$ soit $-\frac{1}{4} \leqslant -x^2 \leqslant 0$.

On ajoute ensuite 1 à tous les membres de la double inégalité précédente. Le sens des inégalités ne change pas.

On obtient $\frac{3}{4} \leqslant 1-x^2 \leqslant 1$.

On applique enfin la fonction logarithme népérien à chaque membre.

On obtient $\ln\frac{3}{4} \leqslant \ln\left(1-x^2\right) \leqslant \ln 1$ soit $\ln\frac{3}{4} \leqslant f\left(x\right) \leqslant 0$.

On utilise la calculatrice pour calculer $\ln\frac{3}{4}$.

$\ln\frac{3}{4} = -0,287682\ldots$

On a donc $-\frac{1}{2} \leqslant f\left(x\right) \leqslant 0$.

L'intervalle *K* est donc stable par *f*.

2$^{\text{e}}$ méthode : On utilise le sens de variation de *f*.

Cette méthode est très efficace.

Bonus 2

On se place dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Quelle est la nature de l'ensemble E des points M de coordonnées $\left(x\,;\,y\right)$ vérifiant l'égalité $\mathrm{e}^{2x} = 3\mathrm{e}^{-y}$?

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $\left(x\,;\,y\right)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = 3\mathrm{e}^{-y} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) = \ln\left(3\mathrm{e}^{-y}\right) \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln 3 + \ln\left(\mathrm{e}^{-y}\right) \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln 3 - y \\ &\Leftrightarrow 2x + y = \ln 3 \end{aligned}$$

La dernière égalité obtenue permet d'affirmer que E est une droite (droite d'équation $2x + y = \ln 3$).