T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 15 décembre 2023

Fiche sans Python
Pas de calculatrice
30 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ pour tout entier naturel n.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers + ∞.

Quelle forme indéterminée rencontre-t-on ? On rencontre une forme indéterminée du type « ……….. ».

On donne les formes suivantes de u_n, la première et la troisième étant valables pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Entourer la (les) forme(s) qui permet(tent) de lever l'indétermination.

$$u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right) \qquad u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \qquad u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}\right)$$

Démontrer à partir de la forme initiale (ou des formes initiales), en détaillant les calculs, que u_n peut bien s'écrire sous la (les) forme(s) choisie(s) puis donner ensuite, sans justifier, la limite de u_n lorsque n tend vers + ∞.

………..

………..

………..

………..

II. (8 points : 1°) 2 points + 2 points ; 2°) 4 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1°) Calculer S_1 et S_2. Écrire les calculs sur les lignes ci-dessous en les présentant en colonnes.

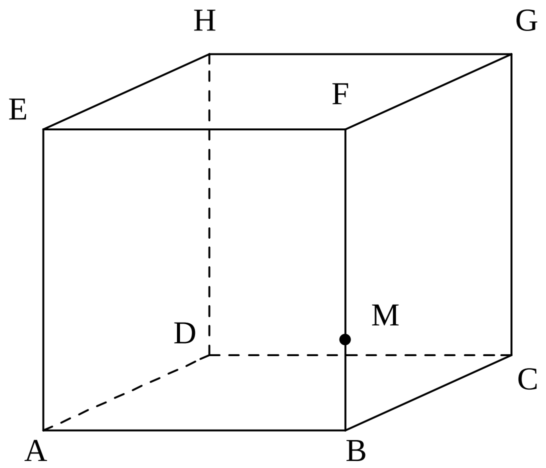
………………………………………………	………………………………………………
………………………………………………	………………………………………………
………………………………………………	………………………………………………

2°) Écrire dans le cadre ci-dessous une fonction Python d'en-tête `def somme(n):` qui prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui renvoie une valeur approchée de S_n.

……………………..…………..
……………………..…………..
……………………..…………..
……………………..…………..
……………………..…………..

III. (8 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 1 point + 2 points)

Soit ABCDEFGH un cube.



1°) Compléter les phrases suivantes :

La droite (EH) est orthogonale au plan $(A \ldots\ldots \ldots\ldots)$.

La droite (AF) est orthogonale à la droite $(C \ldots\ldots)$.

2°) Soit M un point quelconque de la droite (BF).
Que peut-on dire des droites (AM) et (EH) ? Justifier.
L'utilisation des symboles $\perp$ et $\subset$ est autorisée.

……..

……..

Citer le théorème utilisé.

……..

……..

3°) On note I le projeté orthogonal du point E sur la droite (AM).
Placer I sur la figure ci-dessus pour la position du point M donnée.

• On suppose que M est confondu avec B.
Préciser la position de I dans ce cas sans justifier.

…………………………………………………………

• On suppose que M est confondu avec F.
Préciser la position de I dans ce cas sans justifier.

…………………………………………………………

Indications données à l'oral

I. Utiliser la règle pour les barres de fractions et les radicaux.

III. Citer le théorème : écrire l'énoncé du théorème.

Corrigé de l'interrogation écrite du 15-12-2023

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\sqrt{n^2+1}-n$ pour tout entier naturel n.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Quelle forme indéterminée rencontre-t-on ? On rencontre une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

On utilise des guillemets car il s'agit d'une écriture symbolique qu'on n'a théoriquement pas le droit d'écrire (pas d'opérations avec des infinis).

On donne les formes suivantes de u_n, la première et la troisième étant valables pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

Entourer la (les) forme(s) qui permet(tent) de lever l'indétermination.

$$u_n=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right) \qquad u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \qquad u_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}}-\sqrt{n}\right)$$

Démontrer à partir de la forme initiale (ou des formes initiales), en détaillant les calculs, que u_n peut bien s'écrire sous la (les) forme(s) choisie(s) puis donner ensuite, sans justifier, la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\sqrt{n^2+1}-n$

$$=\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{1} \quad \text{(ligne facultative)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\times\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)\times 1} \quad \text{(on utilise la quantité conjuguée du numérateur)}$$

$$=\frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

On a $\sqrt{n^2+1}+n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ donc, par limite d'un inverse, $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

La suite (u_n) converge vers 0.

On ne peut pas utiliser les deux autres formes car elles donnent des formes indéterminées.

II.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on pose $S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1°) Calculer S_1 et S_2. Écrire les calculs sur les lignes ci-dessous en les présentant en colonnes.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{k=2} \frac{(-1)^k}{k}$$
$$= \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2}$$
$$= -1 + \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{k=2}^{k=4} \frac{(-1)^k}{k}$$
$$= \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{5}{12}$$

2°) Écrire dans le cadre ci-dessous une fonction Python d'en-tête `def somme(n):` qui prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui renvoie une valeur approchée de S_n.

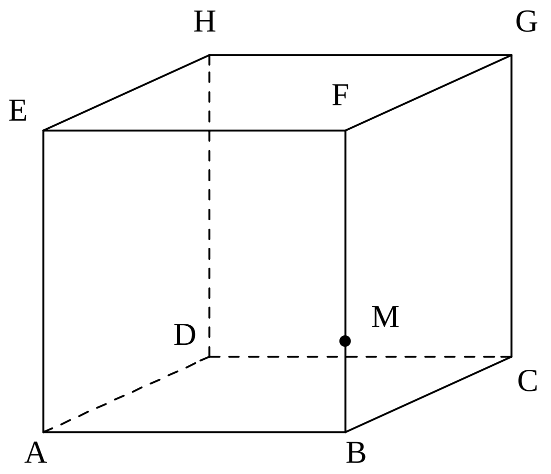
```
def somme(n):
    s=0
    for k in range(n,2*n+1):
        s=s+(-1)**k/k
    return s
```

On peut aussi écrire `s+=(-1)**k/k`.

On ne peut pas donner une formule simplifiée de S_n en fonction de n pour deux raisons :
- il ne s'agit pas de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique ;
- il ne s'agit pas non plus d'une somme télescopique.

III.

Soit ABCDEFGH un cube.



1°) Compléter les phrases suivantes :

La droite (EH) est orthogonale au plan (ABE).

La droite (AF) est orthogonale à la droite (CH).

On utilise la définition en utilisant la parallèle (BE).
On se ramène à deux diagonales du carré ABFE.

Autre réponse possible :

La droite (AF) est orthogonale à la droite (CB).

Attention : La droite (AF) n'est pas orthogonale à la droite (CF). Les deux droites forment un angle de 60° car le triangle ACF est équilatéral.

2°) Soit M un point quelconque de la droite (BF).
Que peut-on dire des droites (AM) et (EH) ? Justifier.
L'utilisation des symboles $\perp$ et $\subset$ est autorisée.

$$\left.\begin{array}{l}(EH)\perp(ABE)\\(AM)\subset(ABE)\end{array}\right\}\text{ donc }(AM)\perp(EH).$$

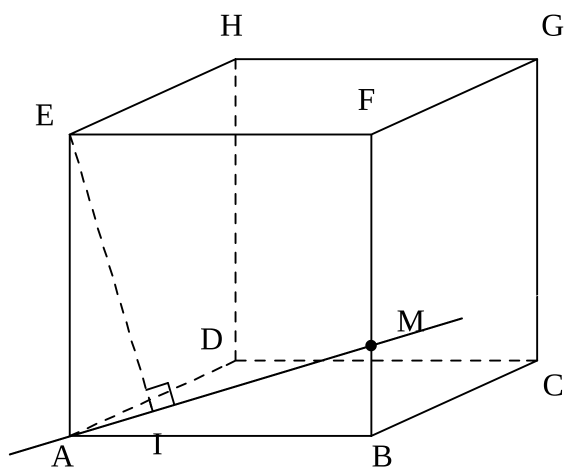
Les droites (AM) et (EH) sont orthogonales.

On peut noter que les droites (AM) et (EH) ne sont pas coplanaires.

Citer le théorème utilisé.

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

3°) On note I le projeté orthogonal du point E sur la droite (AM).
Placer I sur la figure ci-dessus pour la position du point M donnée.



Le segment $[EI]$ est tracé en pointillés. Il ne s'agit cependant pas d'une arête cachée ou d'un segment caché.

Le codage de l'angle droit $\widehat{MIE}$ sur la figure est indispensable. Comme ABFE est une face frontale, l'angle droit est représenté par un angle droit (conservation des angles dans les plans frontaux en perspective cavalière).

● On suppose que M est confondu avec B.
Préciser la position de I dans ce cas sans justifier.

I est confondu avec A.

● On suppose que M est confondu avec F.
Préciser la position de I dans ce cas sans justifier.

I est confondu avec le centre du carré ABFE.