T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 24 novembre 2023

Fiche

20 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (3 points)

On considère l'équation différentielle $3y'=2y \quad (\mathrm{E})$. Compléter la phrase suivante :

Les solutions de (E) sont les fonctions ……………………………………………………………………..

………..

II. (7 points : 1°) 3 points ; 2°) 4 points)

Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.

On suppose que : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 6$; $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2$; $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

1°) Indiquer pour chacune des suites (u_n), (v_n), (w_n) si elle est convergente ou divergente.

(u_n) est une suite …………………….. .

(v_n) est une suite …………………….. .

(w_n) est une suite …………………….. .

2°) Compléter :

$\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 6 \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2 \end{array}\right\}$ donc par limite d'un …………………… , $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} ....$.

$u_n - w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} ....$

$v_n \times w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} ....$

$\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} ....$

III. (3 points)

À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au millième de $\dfrac{1-\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$.

………… (une seule réponse sans égalité)

Compléter : $\left(\dfrac{1-\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ …. car …………. .

IV. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n - n^2$ pour tout entier naturel *n*.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de u_n lorsque *n* tend vers + ∞.

Quelle forme indéterminée rencontre-t-on ?

On rencontre une forme indéterminée du type « ………….. ».

En factorisant u_n, déterminer la limite de u_n lorsque *n* tend vers + ∞.

On présentera de la même manière que pour la question 2°) de l'exercice **II** (modèle donné au début).

V. (4 points : 1 point + 1 point + 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln\left(u_n{}^2 + 1\right)$ pour tout entier naturel *n*.

On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de *n*.

La fonction Python `liste_termes(n)` écrite dans le cadre ci-dessous prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$.

Compléter les pointillés afin qu'elle renvoie la liste de tous les termes dont l'indice est inférieur ou égal à *n*.

```
from math import log

def liste_termes(n):
    u=…..
    L=[u]
    for i in range(……….):

        …………………..…

        L.append(u)
    return L
```

Corrigé de l'interrogation écrite du 24-11-2023

I.

On considère l'équation différentielle $3y'=2y$ $\quad(\text{E})$. Compléter la phrase suivante :

Les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\text{e}^{\frac{2}{3}x}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

On observe d'abord que (E) est équivalente à $y'=\dfrac{2}{3}y$ puis on applique le théorème fondamental pour les équations différentielles de la forme $y'=ay$ où *a* est un réel.

II.

Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.
On suppose que : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 6$; $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2$; $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

1°) Indiquer pour chacune des suites (u_n), (v_n), (w_n) si elle est convergente ou divergente.

(u_n) est une suite convergente.

(v_n) est une suite convergente.

(w_n) est une suite divergente.

2°) Compléter :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 6 \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient, } \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -3 \text{ .}$$

$$u_n - w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

$$v_n \times w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

$$\frac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

III.

À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au millième de $\dfrac{1-\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$.

– 0,462 (une seule réponse sans égalité)

Compléter : $\left(\dfrac{1-\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $-1<\dfrac{1-\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}<1$.

On applique la propriété du cours donnant la limite de $\left(q^n\right)$ où q est un réel.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n-n^2$ pour tout entier naturel n.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers + ∞.
Quelle forme indéterminée rencontre-t-on ?

On rencontre une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

En factorisant u_n, déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers + ∞.
On présentera de la même manière que pour la question 2°) de l'exercice **II** (modèle donné au début).

$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=n(1-n)$

$$\left.\begin{array}{l} n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ 1-n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit, } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty .$$

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=3$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=\ln\left(u_n{}^2+1\right)$ pour tout entier naturel n.
On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de n.
La fonction Python `liste_termes(n)` écrite dans le cadre ci-dessous prend pour argument un entier naturel $n\geqslant 1$.

Compléter les pointillés afin qu'elle renvoie la liste de tous les termes dont l'indice est inférieur ou égal à n.

```
from math import log

def liste_termes(n):
    u=3
    L=[u]
    for i in range(1,n+1):
        u=log(u*2+1)
        L.append(u)
    return L
```

On peut remplacer l'instruction `L.append(u)` par `L=L+[u]`.

La variable `i` peut être remplacée par un tiret du bas.

`i` doit parcourir un ensemble de *n* entiers consécutifs. Il y plusieurs (plein de) choix possibles. Les plus « logiques »sont `range(1,n+1)` ou `range(n)` qui correspond à `range(0,n)`.