T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 13 octobre 2023

Fiche

50 minutes

Numéro : .....

Prénom et nom : ....

Note : ..... / 20

I. (8 points : 1°) 1 point + 1 point + 1 point + 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

On écrira le détail des calculs des questions 1°) et 2°) sur les lignes un peu plus bas de cette page.

1°) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

En déduire, sans nouveaux calculs, la dérivée des fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{2\ln x}{x}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{\ln x}{2x}$, $f_3 : x \mapsto 1 - \dfrac{3\ln x}{4x}$.

On donnera les résultats sous forme factorisée.

....	....	....

2°) Compléter l'égalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) \times f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ldots\ldots\ldots$ (résultat sous la forme la plus simple possible)

3°) Écrire dans le cadre ci-contre une fonction Python d'en-tête `def image(x):` qui prend un réel x strictement positif en argument et qui renvoie son image par la fonction f définie au début de l'exercice.
On suppose avoir importé préalablement la bibliothèque `math`.

```
def image(x):
```

4°) Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$? .... (une seule réponse sans égalité)

1°) ....

....

....

....

....

2°) ....

....

....

....

....

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{(\ln x - 1)^3}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$

1°) Écrire le calcul qui montre la formule utilisée permettant de justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\} \quad f'(x) = -\dfrac{6}{x(\ln x - 1)^4}$

……………………………………………………... (une seule égalité)

2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse e^3 et *T* la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.
Quel est le coefficient directeur de *T* ? On donnera la valeur exacte. ………

III. (4 points)

On considère les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$\ln x + \ln(2x) = \ln 4 \quad (1)$; $(1 + \ln x)(e^x - 2) = 0 \quad (2)$; $\ln \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{\ln 3}{2} \quad (3)$.

Compléter le tableau suivant en écrivant les différents ensembles sans égalités.

	Équation (1)	Équation (2)	Équation (3)
Ensemble de résolution			
Ensemble des solutions			

IV. (1 point)

Comparer les nombres $A = 2^{2023}$ et $B = 3^{1276}$. On pourra utiliser la fonction logarithme népérien.

A … B

V. (2 points)

……………………………………………..

On considère la fonction $f : x \mapsto x - \ln\left| e^x - 1 \right|$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

……………………………………………..

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$.

……………………………………………..

On écrira 4 étapes de calcul sur les lignes ci-contre.

……………………………………………..

VI. (2 points)

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note *D* la droite définie par le système d'équations paramétriques

$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Parmi les points suivants, entourer ceux qui appartiennent à *D*. Aucune justification n'est demandée.

$E(-6068 ; 2024)$ $\qquad$ $F(2023 ; -673)$ $\qquad$ $G(100 ; -31)$

Corrigé de l'interrogation écrite du 14-10-2022

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les questions sont indépendantes les unes des autres.
On écrira le détail des calculs des questions 1°) et 2°) sur les lignes un peu plus bas de cette page.

1°) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

En déduire, sans nouveaux calculs, la dérivée des fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{2\ln x}{x}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{\ln x}{2x}$, $f_3 : x \mapsto 1-\dfrac{3\ln x}{4x}$.

On donnera les résultats sous forme factorisée.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_1'(x) = 2\times\dfrac{1-\ln x}{x^2}$	$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_2'(x) = \dfrac{1-\ln x}{2x^2}$	$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_3'(x) = -\dfrac{3(1-\ln x)}{4x^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_3'(x) = \frac{3(\ln x - 1)}{4x^2}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, celle du dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Attention : f n'est pas une fonction rationnelle à cause de la présence du ln.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{x\times\frac{1}{x}-1\times\ln x}{x^2}$$ (on utilise la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$)

$$= \frac{1-\ln x}{x^2}$$

• Pour f_1, on observe que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_1(x) = 2f(x)$. Autrement dit, $f_1 = 2f$.
On en déduit que $f_1' = 2f'$ (formule du cours $(ku)' = ku'$).

• Pour f_2, on observe que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_2(x) = \dfrac{1}{2}f(x)$ (ou encore $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_2(x) = \dfrac{f(x)}{2}$). Autrement dit, $f_2 = \dfrac{1}{2}f$.

On en déduit que $f_2' = \dfrac{1}{2}f'$ (formule du cours $(ku)' = ku'$).

• Pour f_3, on observe que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_3(x) = 1-\dfrac{3}{4}f(x)$. Autrement dit, $f_3 = 1-\dfrac{3}{4}f$.

On en déduit que $f_3' = 0-\dfrac{3}{4}f'$ soit $f_3' = -\dfrac{3}{4}f'$.

2°) Compléter l'égalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) \times f\left(\frac{1}{x}\right) = -(\ln x)^2$ (résultat sous la forme la plus simple possible)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{(-\ln x)}{\frac{1}{x}} = -x \ln x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) \times f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln x}{\cancel{x}} \times \left(-\cancel{x} \ln x\right) = -(\ln x)^2$$

La technique du π sur la calculatrice permet de vérifier le résultat.
Le résultat affiché est cependant à prendre avec esprit critique car les parenthèses ne sont pas bien placées.

3°) Écrire dans le cadre ci-contre une fonction Python d'en-tête `def image(x):` qui prend un réel x strictement positif en argument et qui renvoie son image par la fonction f définie au début de l'exercice.
On suppose avoir importé préalablement la bibliothèque `math`.

```
def image(x):
    y=log(x)/x
    return y
```

Le programme complet est :

```
from math import *

def image(x):
    y=log(x)/x
    return y
```

On suppose que x est strictement positif au départ.

Variantes :

① On introduit une variable y.
On pourrait cependant conserver la même (c'est-à-dire garder la même variable x) en écrivant :

```
def image(x):
    x=log(x)/x
    return x
```

Le programme complet est :

```
from math import *

def image(x):
    x=log(x)/x
    return x
```

② On peut ne pas utiliser de variable *y*. C'est ce qu'il y a de mieux.

```
def image(x):
    return log(x)/x
```

4°) Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $f\left(x\right)<0$? $\left]0\,;1\right[$ (une seule réponse sans égalité)

L'inéquation $f\left(x\right)<0$ s'écrit $\dfrac{\ln x}{x}<0 \quad (1)$.

On résout donc l'équation (1) dans $\mathbb{R}_+^*$ (condition $x>0$).

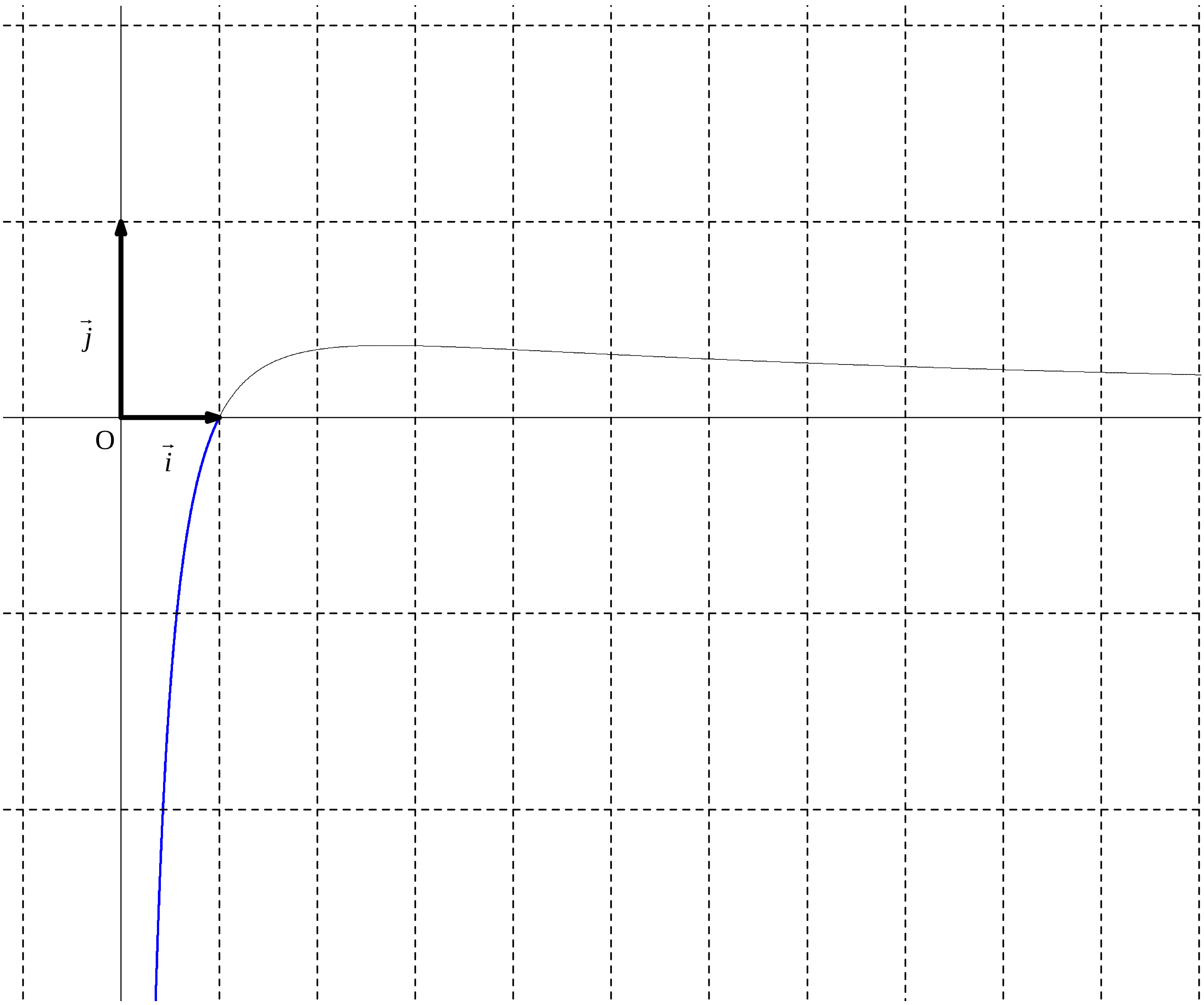
$(1) \Leftrightarrow \ln x<0$ (multiplication des deux membres par x qui est strictement positif)

$\Leftrightarrow \ln x<\ln 1$

$\Leftrightarrow x<1$

L'ensemble des solutions de (1) est donc l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.

On peut vérifier ce résultat graphiquement en traçant la courbe représentative de *f* sur l'écran de la calculatrice.



La partie en bleu est la partie située strictement en dessous de l'axe des abscisses.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{(\ln x - 1)^3}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$

1°) Écrire le calcul qui montre la formule utilisée permettant de justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\} \quad f'(x) = -\dfrac{6}{x(\ln x - 1)^4}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\} \quad f'(x) = 2 \times \left[-\frac{3 \times \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^4} \right] \text{ (une seule égalité)}$$

On commence par écrire $f(x) = 2 \times \dfrac{1}{(\ln x - 1)^3}$ (on « sépare » le 2).

On applique ensuite la formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse e^3 et T la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

Quel est le coefficient directeur de T ? On donnera la valeur exacte. $-\dfrac{3}{8\mathrm{e}^3}$

$$f\,'\left(\mathrm{e}^3\right) = -\frac{6}{\mathrm{e}^3\left(\ln \mathrm{e}^3 - 1\right)^4}$$

$$= -\frac{6}{\mathrm{e}^3 \times (3-1)^4}$$

$$= -\frac{6}{\mathrm{e}^3 \times 2^4}$$

$$= -\frac{6}{16\mathrm{e}^3}$$

$$= -\frac{3}{8\mathrm{e}^3}$$

La calculatrice permet de faire complètement le calcul.

On peut vérifier le calcul du nombre dérivé à l'aide la calculatrice (Numworks : boîte à outils, puis rubrique Analyse).

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{2}{\left(\ln(\mathrm{x})-1\right)^3}\right)\right|_{\mathrm{x}=\mathrm{e}^3}$$

III.

On considère les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$\ln x + \ln(2x) = \ln 4 \quad (1)$; $(1+\ln x)\left(\mathrm{e}^x - 2\right) = 0 \quad (2)$; $\ln \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{\ln 3}{2} \quad (3)$.

Compléter le tableau suivant en écrivant les différents ensembles sans égalités.

	Équation (1)	Équation (2)	Équation (3)
Ensemble de résolution	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$
Ensemble des solutions	$\left\{\sqrt{2}\right\}$	$\left\{\dfrac{1}{\mathrm{e}} ; \ln 2\right\}$	$\left\{\sqrt{6}\right\}$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + \ln(2x) = \ln 4 \quad (1)$.

Condition d'existence :

On doit avoir $\begin{cases} x > 0 \\ 2x > 0 \end{cases}$ soit $x > 0$.

On résout donc l'équation (1) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(1) \Leftrightarrow \ln(x \times 2x) = \ln 4$

$\Leftrightarrow \ln(2x^2) = \ln 4$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ (qui convient car $\sqrt{2} > 0$) ou $x = -\sqrt{2}$ (qui ne convient pas car $-\sqrt{2} < 0$)

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \left\{\sqrt{2}\right\}$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1 + \ln x)(\mathrm{e}^x - 2) = 0 \quad (2)$.

On reconnaît une « équation produit-nul ».
On ne développe surtout pas le premier membre.

Conditions d'existence :

On doit avoir $x > 0$.
On résout donc l'équation (2) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(2) \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0$ ou $\mathrm{e}^x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = -1$ ou $\mathrm{e}^x = 2$

$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}$ ou $x = \ln 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ (qui convient car $\frac{1}{\mathrm{e}} > 0$) ou $x = \ln 2$ (qui convient car $\ln 2 > 0$)

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2 = \left\{\frac{1}{\mathrm{e}} ; \ln 2\right\}$$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{\ln 3}{2}$ (3).

Conditions d'existence :

On doit avoir $\frac{x}{\sqrt{2}}>0$ soit $x>0$.

On résout l'inéquation (3) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(3) \Leftrightarrow \ln\frac{x}{\sqrt{2}}=\ln\sqrt{3}$ (ou $\ln\frac{x}{\sqrt{2}}=\ln 3^{\frac{1}{2}}$ en utilisant une écriture en exposant fractionnaire)

$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{6}$ (on retient cette solution)

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$S_3=\left\{\sqrt{6}\right\}$

La calculatrice fournit des valeurs approchées des solutions intéressantes pour vérifier.

On vérifie avec la calculatrice les ensembles de solutions en utilisant l'outil de résolution d'équations.

IV.

Comparer les nombres $\mathrm{A}=2^{2023}$ et $\mathrm{B}=3^{1276}$. On pourra utiliser la fonction logarithme népérien.

$$\mathrm{A}>\mathrm{B}$$

La calculatrice donne : $\ln\mathrm{A}=2023\ln 2=1402{,}2367462...$ et $\ln\mathrm{B}=1276\ln 3=1401{,}829280...$.

On a $\ln\mathrm{A}>\ln\mathrm{B}$ donc $\mathrm{A}>\mathrm{B}$.

Le calcul de A et B dépasse les capacités de la calculatrice.
On peut démontrer que A et B ont le même nombre de chiffres dans leur écriture en base dix : 609.
Le nombre de chiffres ne permet donc pas de les comparer.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto x - \ln\left| e^x - 1 \right|$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \dfrac{1}{1-e^x}$.

On écrira 4 étapes de calcul sur les lignes ci-contre.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 1 - \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ (on utilise la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\ln|u|\right)' = \dfrac{u'}{u}$)

$$= \frac{\cancel{e^x} - 1 - \cancel{e^x}}{e^x - 1}$$

$$= -\frac{1}{e^x - 1}$$

$$= \frac{1}{-\left(e^x - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{1 - e^x}$$

VI.

Dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note D la droite définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Parmi les points suivants, entourer ceux qui appartiennent à D. Aucune justification n'est demandée.

$E(-6068\,;2024)$ $\qquad$ $F(2023\,;-673)$ $\qquad$ $G(100\,;-31)$

● Pour le point E, on cherche s'il existe un réel t vérifiant le système $\begin{cases} 1 + 3t = -6068 \\ 1 - t = 2024 \end{cases}$.

On obtient $\begin{cases} 3t = -6069 \\ t = -2023 \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} t = -2023 \\ t = -2023 \end{cases}$.

On en déduit que $E \in D$ (E est associé au paramètre $t = -2023$).

● Pour le point F, on cherche s'il existe un réel t vérifiant le système $\begin{cases} 1+3t=2023 \\ 1-t=-673 \end{cases}$.

On obtient $\begin{cases} 3t=2022 \\ t=674 \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} t=674 \\ t=674 \end{cases}$.

On en déduit que $\mathrm{F} \in D$ (F est associé au paramètre $t=674$).

● Pour le point G, on cherche s'il existe un réel t vérifiant le système $\begin{cases} 1+3t=100 \\ 1-t=-31 \end{cases}$.

On obtient $\begin{cases} t=33 \\ t=32 \end{cases}$.

On en déduit que $\mathrm{G} \notin D$.