T exp

Les racines n-ièmes de l'unité

Le 19-7-2022

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Résolution de l'équation $x^n = 1$ avec x réel.

Résolution de $x^n = x$ toujours avec x réel.

Dans ce chapitre, on se place dans l'ensemble des complexes.
Pour tout entier naturel n non nul : l'équation $z^n = 1$ admet n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$.

On a appris à déterminer les racines carrées d'un nombre complexe.

Exemples (étude de cas particuliers) :

1°) $n = 2$

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 1 \quad (1)$.

On effectue une résolution algébrique.
$(1) \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$

Les racines carrées de 1 sont 1 et – 1.

2°) $n = 3$

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow z^3 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (z-1)(z^2 + z + 1) = 0$ (identité algébrique $z^n - 1$)

$\Leftrightarrow z = 1$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow z = 1$ ou $z = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

Le nombre $z = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ est souvent noté j.
On vérifie alors que l'autre racine est j^2 ou jbarre.

3°) $n = 4$

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \left(z^2\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow z^2 = 1$ ou $z^2 = -1$

$\Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$ ou $z = i$ ou $z = -i$

Les racines quatrièmes de 1 sont 1, i, – 1, – i.

Cas général :

Résolution :

On observe d'abord que si z est solution, alors $z \neq 0$.

On pose ensuite $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$(1) \Leftrightarrow \left(re^{i\theta}\right)^n = 1$

$\Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = 1$

$\Leftrightarrow r^n = 1$ et $e^{in\theta} = 1$

$\Leftrightarrow r = 1$ (car $r > 0$) et $n\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow r = 1$ et $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Propriété :

Les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$ sont les **racines n-ièmes de l'unité**.

L'ensemble des racines de l'unité est noté U_n.

$$U_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } k \in [\![1, n-1]\!] \right\}$$

Exemples :

$U_1 = \{1\}$

$U_2 = \{1\,;-1\}$ (ensemble des racines carrées complexes de l'unité)

$U_3 = \left\{1\,;\, e^{i\frac{2\pi}{3}}\,;\, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$ (ensemble des racines cubiques complexes de l'unité)

U_3 est l'ensemble de nombres complexes de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ avec $k \in [\![0\,;2]\!]$.

On pose souvent : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

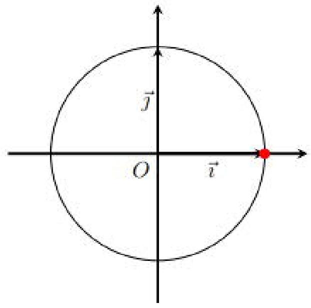
On peut alors écrire $U_3 = \{1\,;\, j\,;\, j^2\}$.

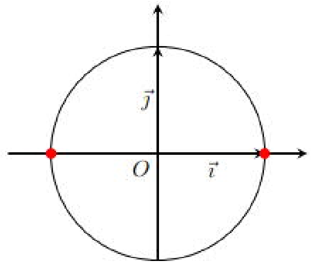
$U_4 = \{1\,;-1\,;\, i\,;-i\}$ (ensemble des racines quatrièmes de l'unité)

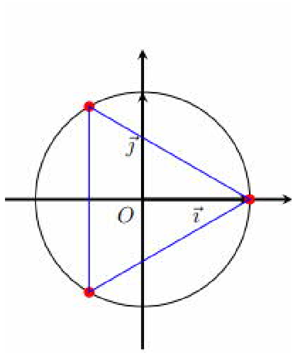
U_4 est l'ensemble de nombres complexes de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{4}}$ avec $k \in [\![0\,;3]\!]$.

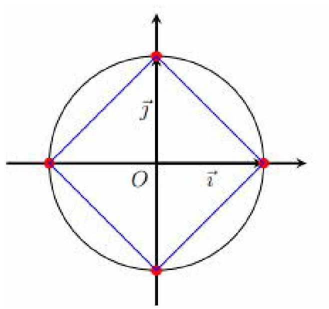
Structure cyclique

Représentation graphique des racines dans le plan complexes (points images)

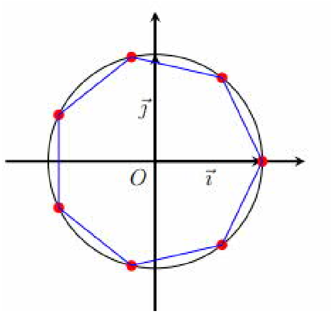








Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, les points dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité appartiennent au cercle trigonométrique et forment un polygone régulier à n cotés



Convexe / non convexe / étoilé

Somme des racines *n*-ièmes de l'unité

Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe quelconque

Exercices

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z-1\right)^4=1$.