

Numéro :

Prénom et nom :

Note : / 20

I. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et l'on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . On se référera au graphique donné sur la feuille annexe.

Calculer l'aire \mathcal{A} en unité d'aire du domaine limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

.....

II. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ et l'on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . On se référera au graphique donné sur la feuille annexe.

Calculer l'aire \mathcal{A} en unité d'aire du domaine limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

.....

III. (2 points : 1 point par intégrale)

Compléter les égalités suivantes : $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x} = \dots\dots\dots$, $\int_0^1 e^{2x-1} dx = \dots\dots\dots$.

Écrire le détail des calculs au verso de la feuille annexe.

IV. (2 points)

Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

Compléter l'égalité suivante :

$$\int_0^{\ln 2} e^x (e^x - 1)^n dx = \dots\dots\dots$$

On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

V. (1 point)

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I = [-1 ; 2]$ dont la valeur moyenne sur I est égale à 4.

Quelle est la valeur de $\int_{-1}^2 f(x) dx$?

..... (une seule réponse sans égalité)

VI. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Pour tout réel a , on pose $I(a) = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx$.

On écrira les trois résultats dans les cases du tableau ci-dessous.

1°) Calculer $I(1)$.

2°) Calculer $I(2)$.

Indication : Vérifier d'abord que pour tout réel x on a : $\frac{e^{2x}}{e^x + 1} = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$.

3°) Calculer $I(-1)$.

Indication : Vérifier d'abord que pour tout réel x on a : $\frac{e^{-x}}{e^x + 1} = \frac{e^{-2x}}{e^{-x} + 1}$ puis utiliser ensuite une égalité analogue à celle donnée dans la question précédente.

.....
-------	-------	-------

VII. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit a un réel strictement positif donné. On pose $I(a) = \int_1^a \frac{e^x}{x} dx$ et $J(a) = \int_1^a \ln x \times e^x dx$.

On ne cherchera pas à calculer $I(a)$ et $J(a)$.

1°) Quel est le signe de $I(a)$ et $J(a)$ pour a réel quelconque strictement supérieur à 1 ?

.....

2°) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I(a)$ en fonction de $J(a)$.

.....

VIII. (1 point)

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ sur l'intervalle $D =]0 ; +\infty[$.

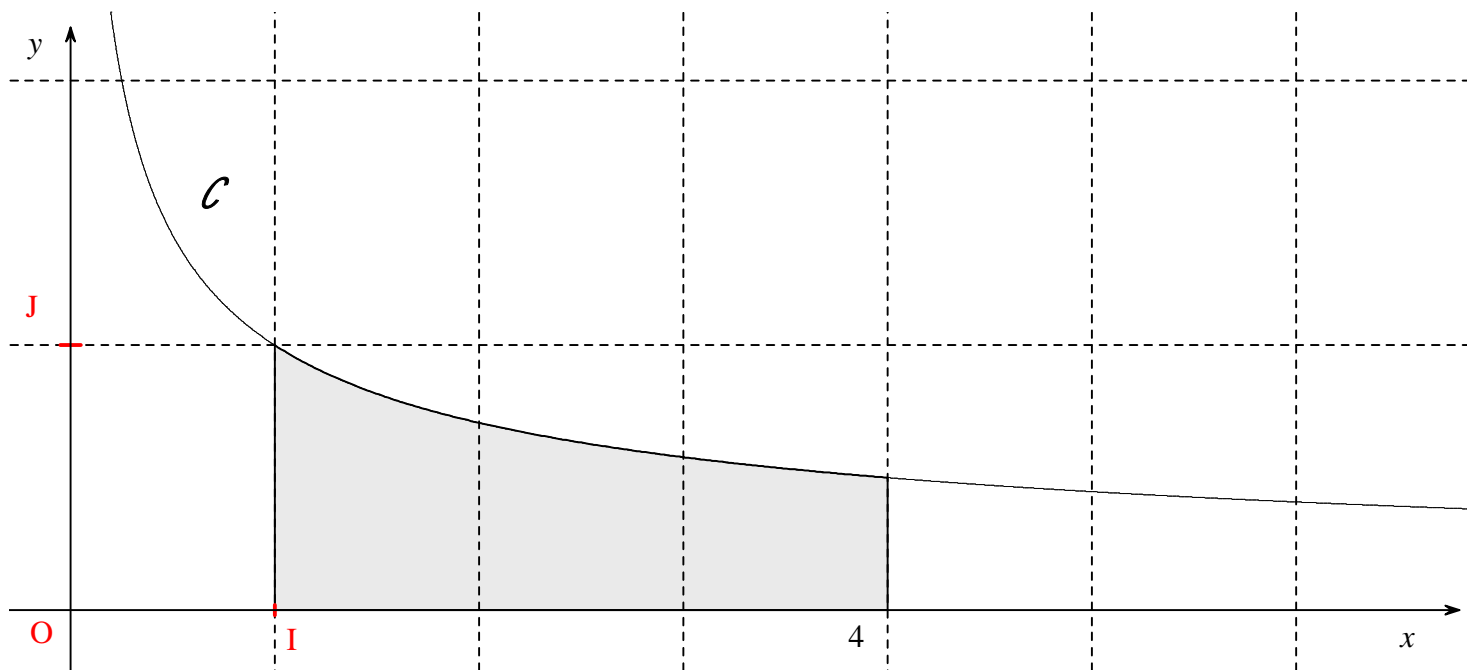
Compléter l'égalité :

$\forall x \in D \quad F'(x) = \dots\dots\dots$

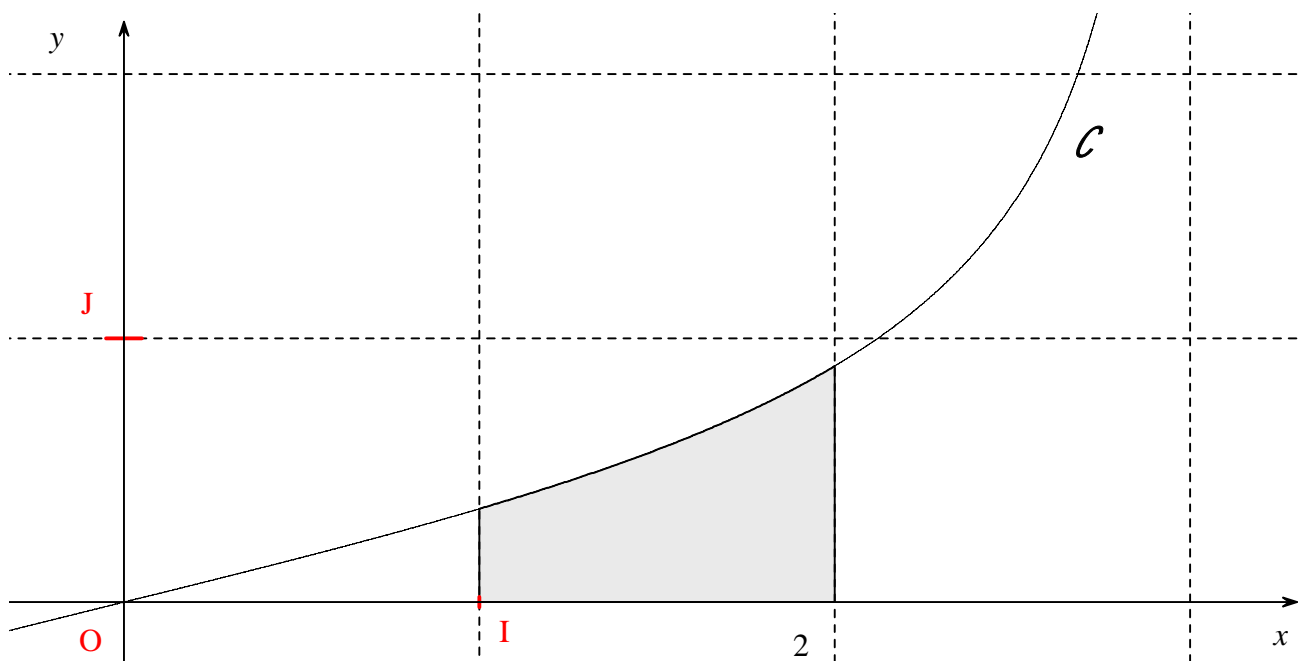
Feuille annexe de l'interrogation écrite du mardi 16 mai 2023

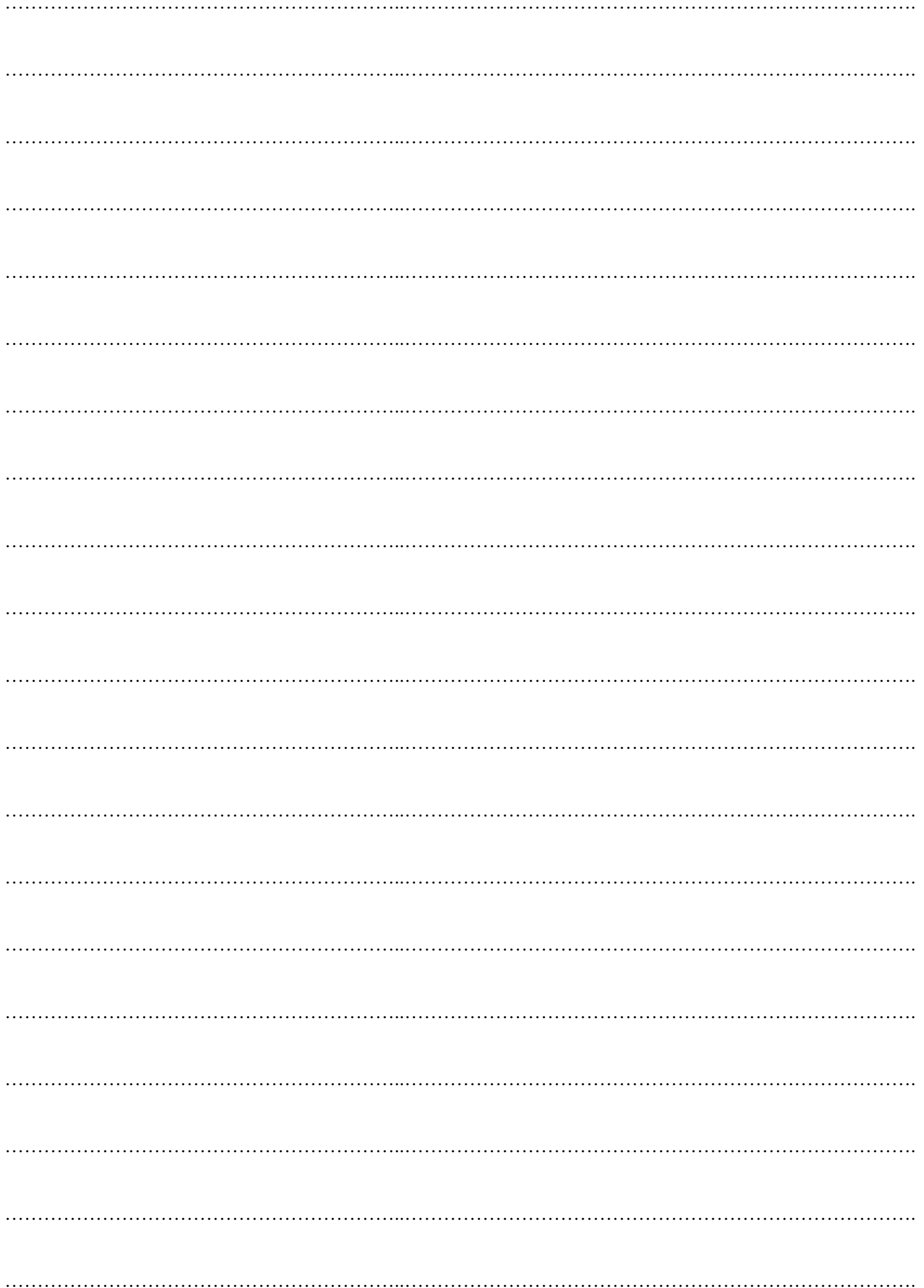
Numéro :	Prénom et nom :
----------------	-----------------------

I.



II.





Corrigé de l'interrogation écrite du 16-5-2023

I.

On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et l'on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . On se référera au graphique donné sur la feuille annexe.

Calculer l'aire A en unité d'aire du domaine limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=4$.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 f(x) \, dx \quad (\text{car la fonction } f \text{ est positive ou nulle sur l'intervalle } [1; 4]) \\ &= \left[2\sqrt{x} \right]_1^4 \\ &= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} \\ &= 2 \times 2 - 2 \times 1 \\ &= 4 - 2 \\ &= 2 \text{ u. a.} \end{aligned}$$

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

II.

On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ et l'on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . On se référera au graphique donné sur la feuille annexe.

Calculer l'aire A en unité d'aire du domaine limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 f(x) \, dx \quad (\text{car la fonction } f \text{ est positive ou nulle sur l'intervalle } [1; 2]) \\ &= \left[-\sqrt{9-x^2} \right]_1^2 \quad \left(\text{on écrit } f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}} \right) \\ &= -\sqrt{9-2^2} + \sqrt{9-1^2} \\ &= \sqrt{8} - \sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{2} - \sqrt{5} \text{ u. a.} \end{aligned}$$

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

III.

Compléter les égalités suivantes : $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x} = -\ln 2$

$$, \int_0^1 e^{2x-1} dx = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

Écrire le détail des calculs au verso de la feuille annexe.

$$\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x} = \left[\ln |x| \right]_{-4}^{-2} \quad (\text{on notera la présence de barres de valeur absolue indispensable ici})$$

$$= \ln |-2| - \ln |-4|$$

$$= \ln 2 - \ln 4$$

$$= \ln 2 - 2 \ln 2$$

$$= -\ln 2$$

$$\int_0^1 e^{2x-1} dx = \left[\frac{e^{2x-1}}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{2x-1} \right]_0^1 \quad (\text{ligne facultative})$$

$$= \frac{e^1 - e^{-1}}{2} \quad (\text{on peut aussi écrire } \frac{1}{2}e^1 - \frac{1}{2}e^{-1})$$

$$= \frac{e - e^{-1}}{2}$$

Une autre forme possible est : $\int_0^1 e^{2x-1} dx = \frac{e^2 - 1}{2e}$. C'est le résultat que donne la calculatrice Numworks quand on

tape l'expression $\frac{e - e^{-1}}{2}$

On vérifie les résultats à l'aide de la calculatrice.

IV.

Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

Compléter l'égalité suivante :

$$\int_0^{\ln 2} e^x (e^x - 1)^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} e^x (e^x - 1)^n dx &= \left[\frac{(e^x - 1)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\ln 2} \quad (\text{forme } u' \times u^n) \\ &= \frac{(e^{\ln 2} - 1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(e^0 - 1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

V.

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I = [-1 ; 2]$ dont la valeur moyenne sur I est égale à 4.

Quelle est la valeur de $\int_{-1}^2 f(x) dx$?

12 (une seule réponse sans égalité)

On se réfère à la définition de la valeur moyenne d'une fonction.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ ($a < b$).

On appelle valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

$$\text{On a : } 4 = \frac{1}{2 - (-1)} \times \int_{-1}^2 f(x) dx \text{ soit } 4 = \frac{1}{3} \times \int_{-1}^2 f(x) dx.$$

$$\text{On en déduit que } \int_{-1}^2 f(x) dx = 3 \times 4 = 12.$$

On peut noter éventuellement μ la valeur moyenne de f sur I .

VI.

Pour tout réel a , on pose $I(a) = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx$.

On écrira les trois résultats dans les cases du tableau ci-dessous.

1°) Calculer $I(1)$.

2°) Calculer $I(2)$.

Indication : Vérifier d'abord que pour tout réel x on a : $\frac{e^{2x}}{e^x + 1} = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$.

3°) Calculer $I(-1)$.

Indication : Vérifier d'abord que pour tout réel x on a : $\frac{e^{-x}}{e^x + 1} = \frac{e^{-2x}}{e^{-x} + 1}$ puis utiliser ensuite une égalité analogue

à celle donnée dans la question précédente.

$I(1) = \ln \frac{3}{2}$	$I(2) = 1 + \ln \frac{2}{3}$	$I(-1) = \frac{1}{2} + \ln 3 - 2 \ln 2$
--------------------------	------------------------------	---

$$I(1) = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$= \left[\ln |e^x + 1| \right]_0^{\ln 2}$$

$$= \left[\ln(e^x + 1) \right]_0^{\ln 2}$$

$$= \ln(e^{\ln 2} + 1) - \ln(e^0 + 1)$$

$$= \ln 3 - \ln 2$$

$$= \ln \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
I(2) &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx \\
&= \int_0^{\ln 2} \left(e^x - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx \quad (\text{on utilise l'égalité } \frac{e^{2x}}{e^x + 1} = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1} \text{ valable pour tout réel } x) \\
&= \left[e^x - \ln |e^x + 1| \right]_0^{\ln 2} \\
&= \left[e^x - \ln(e^x + 1) \right]_0^{\ln 2} \\
&= e^{\ln 2} - \ln(e^{\ln 2} + 1) - e^0 + \ln(e^0 + 1) \\
&= 1 - \ln 3 + \ln 2 \\
&= 1 + \ln \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(-1) &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-x}}{e^x + 1} dx \\
&= \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-2x}}{e^{-x} + 1} dx \quad (\text{on utilise l'égalité } \frac{e^{-x}}{e^x + 1} = \frac{e^{-2x}}{e^{-x} + 1} \text{ valable pour tout réel } x) \\
&= \int_0^{\ln 2} \left(e^{-x} - \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} \right) dx \quad (\text{on utilise l'égalité } \frac{e^{2x}}{e^x + 1} = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1} \text{ qui donne } \frac{e^{-2x}}{e^{-x} + 1} = e^{-x} - \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} \\
&\text{en remplaçant } x \text{ par } -x) \\
&= \left[-e^{-x} + \ln |e^{-x} + 1| \right]_0^{\ln 2} \\
&= \left[\ln(e^{-x} + 1) - e^{-x} \right]_0^{\ln 2} \\
&= \ln(e^{-\ln 2} + 1) - e^{-\ln 2} - \ln(e^0 + 1) + e^0 \\
&= \ln\left(\frac{1}{2} + 1\right) - \frac{1}{2} - \ln 2 + 1 \\
&= \ln \frac{3}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \\
&= \ln 3 - \ln 2 - \ln 2 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \ln 3 - 2 \ln 2
\end{aligned}$$

Autre forme possible du résultat : $I(-1) = \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4}$

VII.

Soit a un réel strictement positif donné. On pose $I(a) = \int_1^a \frac{e^x}{x} dx$ et $J(a) = \int_1^a \ln x \times e^x dx$.

On ne cherchera pas à calculer $I(a)$ et $J(a)$.

On peut noter que $I(1) = J(1) = 0$ de manière évidente.

1°) Quel est le signe de $I(a)$ et $J(a)$ pour a réel quelconque strictement supérieur à 1 ?

$\forall x \in [1; a] \quad \frac{e^x}{x} \geq 0$ et $\ln x \times e^x \geq 0$ (on peut justifier en faisant une analyse du signe des différents « éléments » qui interviennent dans le quotient pour la première inégalité et dans le produit pour la deuxième inégalité).

Les bornes des intégrales qui définissent $I(a)$ et $J(a)$ sont dans le « bon » sens puisque $a > 1$ par hypothèse, on en déduit que $I(a) \geq 0$ et $J(a) \geq 0$ (propriété du signe d'une intégrale).

Il serait possible de démontrer que $I(a) > 0$ et $J(a) > 0$ en utilisant une propriété des intégrales qui sera vue dans le supérieur.

2°) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I(a)$ en fonction de $J(a)$.

On utilise la formule d'intégration par parties.

On considère la fonction u définie par $u(x) = e^x$ et une fonction v telle que $v'(x) = \frac{1}{x}$.

On peut choisir la fonction v définie par $v(x) = \ln x$ (comme a est strictement positif, l'intervalle fermé borné d'extrémités 1 et a est inclus dans l'intervalle $]0; +\infty[$; la présence d'une valeur absolue n'est donc pas utile).

On a alors :

$$u(x) = e^x ; v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$u'(x) = e^x ; v(x) = \ln x.$$

$$I(a) = \int_1^a \frac{e^x}{x} dx$$

$$(I(a) = \int_1^a u(x) \times v'(x) dx)$$

$$= \left[\ln x \times e^x \right]_1^a - \int_1^a \ln x \times e^x dx$$

$$= \ln a \times e^a - \ln 1 \times e^1 - \int_1^a \ln x \times e^x dx$$

$$= \ln a \times e^a - \int_1^a \ln x \times e^x dx$$

$$= \ln a \times e^a - J(a)$$

VIII.

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ sur l'intervalle $D =]0; +\infty[$.

Compléter l'égalité :

$$\forall x \in D \quad F'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$$

$$\forall x \in D \quad F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

On ne cherche pas à calculer l'intégrale. Il n'est pas possible de déterminer l'expression d'une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$.

Considérons la fonction $u : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$.

La fonction u est continue sur D (quotient de deux fonctions continues sur D , celle du dénominateur ne s'annulant pas sur D).

$$\text{De plus, } \forall x \in D \quad F(x) = \int_1^x u(t) dt.$$

D'après le théorème du cours (théorème fondamental de l'analyse), F est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in D \quad F'(x) = u(x)$

$$\text{soit } \forall x \in D \quad F'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

On peut dire que F est la primitive de u qui s'annule en 1.