T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 7 avril 2023

50 minutes

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (8 points : 2 points par primitive)

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On demande de donner l'expression d'une primitive F sur I.

$f(x)=$	I	$\mathrm{F}(x)=$
$\dfrac{(\ln x)^2}{x}$	$]0\,;+\infty[$	
$1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$	$\mathbb{R}$	
$x^2\mathrm{e}^{\left(x^3\right)}$	$\mathbb{R}$	
$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$	$]0\,;+\infty[$	

II. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer l'expression de la primitive F de f sur l'intervalle $I=]0\,;+\infty[$ telle que $\mathrm{F}(\mathrm{e})=\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}$.

……………………………………… (une seule égalité)

III. (2 points)

On note F la primitive de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Compléter l'égalité suivante : $\mathrm{F}(\ln 3)=$…….. (un seul résultat).

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{x-1}+2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Vérifier au brouillon que pour tout réel x, on a $f(x) = e \times \dfrac{e^{x-1}}{e^{x-1}+2}$.

En déduire l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

…………………………………… (une seule égalité)

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{\left(e^{x-1}+2\right)^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression d'une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

…………………………………… (une seule égalité)

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+2} + e^{1-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0 ; -2\}$.

1°) Compléter la limite suivante : $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} .....$

2°) On admet que f est strictement croissante sur l'intervalle $I = [1 ; +\infty[$.

Compléter la phrase suivante :

Pour tout réel $k \in$ ...., il existe un unique réel appartenant à I dont l'image par f est égale à k.

Bonus (1 point) :

On considère la fonction $f : x \mapsto \left(3x + \dfrac{1}{x^2}\right)^3$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer l'expression d'une primitive F de f sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$.

…………………………………………………… (une seule égalité)

Corrigé de l'interrogation écrite du 7-4-2023

I.

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f* définie sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$.

On demande de donner l'expression d'une primitive F sur *I*.

$f(x)=$	I	$\text{F}(x)=$
$\dfrac{(\ln x)^2}{x}$	$]0\,;+\infty[$	$\dfrac{(\ln x)^3}{3}$
$1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$	$\mathbb{R}$	$x-\sqrt{x^2+4}$
$x^2\text{e}^{\left(x^3\right)}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{3}\text{e}^{\left(x^3\right)}$
$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$	$]0\,;+\infty[$	$\dfrac{x^3}{3}+2x-\dfrac{1}{x}$

Comme on doit donner une primitive, on peut rajouter n'importe quelle constante.

• $f : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

On effectue la réécriture $f(x)=\dfrac{1}{x}\times(\ln x)^2$.

On pense à la forme $u'u^n$.

• $f : x \mapsto 1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

Pour la partie $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, on pense à la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

On pose $u(x)=x^2+4$. On a alors $u'(x)=2x$.

On peut écrire $f=1-\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

• $f : x \mapsto x^2 e^{\left(x^3\right)}$

On pense à la forme $u' e^u$.

On pose $u(x) = x^3$. On a alors $u'(x) = 3x^2$.

On effectue la réécriture : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f = \frac{1}{3} \times 3x^2 e^{\left(x^3\right)}$.

On peut donc écrire $f = \frac{1}{3} \times u' \times e^u$ (on a une constante d'ajustement).

• $f : x \mapsto \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

On développe $f(x)$ (il n'y a pas d'autre méthode).

$$\forall x \in]0\,;+\infty[\quad f(x) = x^2 + 2 \times \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} + \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer l'expression de la primitive F de f sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$ telle que $\mathrm{F}(e) = \frac{1}{2e^2}$.

$$\mathrm{F}(x) = 3\ln x + \frac{1}{2x^2} - 3 \quad \text{(une seule égalité)}$$

Les primitives de f sur I sont les fonctions $\mathrm{F} : x \mapsto 3\ln x + \frac{1}{2x^2} + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

On commence par effectuer une réécriture de $f(x)$ sous la forme $f(x) = 3 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$.

On pourrait écrire $\ln|\,x\,|$ avec des barres de valeur absolue autour du x, mais, comme on est dans l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$, ces barres peuvent être remplacées par des parenthèses.

On calcule $\mathrm{F}(e)$ en fonction de k.

$$\mathrm{F}(e) = 3\ln e + \frac{1}{2e^2} + k$$

$$= 3 + \frac{1}{2e^2} + k$$

On cherche k tel que $\mathrm{F}(\mathrm{e})=\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow 3+\cancel{\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}}+k=\cancel{\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}}$

$\Leftrightarrow k=-3$

La primitive F de f sur I telle que $\mathrm{F}(\mathrm{e})=\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}$ est donc définie par $\mathrm{F}(x)=3\ln x+\dfrac{1}{2x^2}-3$.

III.

On note F la primitive de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Compléter l'égalité suivante : $\mathrm{F}(\ln 3)=\dfrac{2}{3}$ (un seul résultat).

On sait qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ (a étant un réel non nul) est la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\mathrm{F} : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}+k$ $(k \in \mathbb{R})$.

On calcule $\mathrm{F}(0)$ en fonction de k.

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(0)&=-\mathrm{e}^0+k\\&=k-1\end{aligned}$$

On cherche k tel que $\mathrm{F}(0)=0$ (1).

$(1) \Leftrightarrow k-1=0$

$\Leftrightarrow k=1$

La primitive de f qui s'annule en 0 est donc la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto 1-\mathrm{e}^{-x}$.

On passe au calcul de $\mathrm{F}(\ln 3)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\ln 3)&=1-\mathrm{e}^{-\ln 3}\\&=1-\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 3}}\\&=1-\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Pour le calcul de $e^{-\ln 3}$, on peut écrire $e^{-\ln 3}=\dfrac{1}{e^{\ln 3}}$ ou $e^{-\ln 3}=e^{\ln\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$ en utilisant les propriétés du logarithme népérien et de l'exponentielle.
Avec la calculatrice, on trouve aussi aisément le résultat sans effectuer ces transformations d'écriture qu'il est néanmoins indispensable de maîtriser.

IV.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{x-1}+2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Vérifier au brouillon que pour tout réel x, on a $f(x)=e\times\dfrac{e^{x-1}}{e^{x-1}+2}$.

En déduire l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad F(x)=e\times\ln\left(e^{x-1}+2\right)\ \text{(une seule égalité)}$$

La transformation d'écriture $f(x)=e\times\dfrac{e^{x-1}}{e^{x-1}+2}$ est quasiment évidente car $e^x=e\times e^{x-1}$.

Pour déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on utilise l'expression $f(x)=e\times\dfrac{e^{x-1}}{e^{x-1}+2}$.

On pense à la forme $\dfrac{u'}{u}$.

On pose $u(x)=e^{x-1}+2$. On a alors $u'(x)=e^{x-1}$.

On peut écrire $f=e\times\dfrac{u'}{u}$.

Une primitive de F sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $F=e\ln|u|$.

On peut donc écrire $\forall x\in\mathbb{R}\quad F(x)=e\ln\left|e^{x-1}+2\right|$.

Or $\forall x\in\mathbb{R}\quad e^{x-1}+2>0$ (visible de manière évidente car le résultat d'une exponentielle est toujours strictement positive) donc $\left|e^{x-1}+2\right|=e^{x-1}+2$.

Les barres de valeur absolue peuvent donc être remplacées par des parenthèses : $\forall x\in\mathbb{R}\quad F(x)=e\times\ln\left(e^{x-1}+2\right)$.

Une autre méthode consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par e.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{e^x\times e}{e^x+2e}=e\times\frac{e^x}{e^x+2e}$$

Une primitive de f est la fonction $x\mapsto e\times\ln\left(e^x+2e\right)$.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x-1}+2\right)^{2}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression d'une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{G}(x) = -\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{x-1}+2} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On commence par effectuer une transformation d'écriture similaire à celle effectuée pour *f*.

$$g(x) = \mathrm{e} \times \frac{\mathrm{e}^{x-1}}{\left(\mathrm{e}^{x-1}+2\right)^{2}}$$

On pense à la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ (ou $\dfrac{u'}{u^n}$ avec $n=2$).

On reprend la fonction u considérée dans la résolution de la question précédente [u est définie par $u(x) = \mathrm{e}^{x-1}+2$].

On peut écrire $g = \mathrm{e} \times \dfrac{u'}{u^2}$ (on a une constante d'ajustement).

Une autre méthode consiste à écrire $\mathrm{e}^{x-1}+2 = \mathrm{e}^{-1}\left(\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}\right)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{2}}{\left(\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}\right)^{2}} = \mathrm{e}^{2} \times \frac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}\right)^{2}}$$

Une primitive de g est la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{2} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}} = -\dfrac{\mathrm{e}^{2}}{\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}}$.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+2} + \mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\,;-2\}$.

1°) Compléter la limite suivante : $\quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \mathrm{e}$

$$\frac{1}{x+2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$$\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \mathrm{e} \quad \text{(limite d'une composée)}$$

On en déduit le résultat par limite d'une somme.

On vérifie le résultat graphiquement en utilisant la calculatrice (on a uniquement une valeur approchée).

2°) On admet que *f* est strictement croissante sur l'intervalle $I = [1\,;+\infty[$.

Compléter la phrase suivante :

Pour tout réel $k \in \left[\dfrac{4}{3}\,;\mathrm{e}\right[$, il existe un unique réel appartenant à I dont l'image par *f* est égale à k.

On utilise l'adaptation du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires aux fonctions strictement monotones sur un intervalle quelconque.

On commence par calculer $f(1)$ (en valeur exacte).

$$f(1)=\frac{1}{1+2}+\mathrm{e}^{1-\frac{1}{1}}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

On notera que le crochet est ouvert à droite.

On peut dresser le tableau de variations de *f* sur *I*.

C_1 : La fonction *f* est continue sur *I*.

C_2 : *f* est strictement croissante sur *I*.

C_3 : *k* appartient à l'intervalle défini par l'image de 1 et la limite de *f* en + ∞, c'est-à-dire $\left[\frac{4}{3}\,;\,\mathrm{e}\right[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa version généralisée, il existe un unique réel appartenant à *I* dont l'image par *f* est égale à *k*.

Bonus :

On considère la fonction $f : x \mapsto \left(3x+\frac{1}{x^2}\right)^3$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer l'expression d'une primitive F de *f* sur l'intervalle $I=\left]0\,;+\infty\right[$.

$$\mathrm{F}(x)=\frac{27x^4}{4}+27x-\frac{9}{2x^2}-\frac{1}{5x^5} \quad \text{(une seule égalité)}$$

Il faut commencer par développer $f(x)$ (il n'y a pas d'autre méthode).

Pour cela, on utilise l'identité remarquable cubique : $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (cas particulier de la formule du binôme de Newton).

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f(x)=(3x)^3+3\times(3x)^2\times\frac{1}{x^2}+3\times 3x\times\left(\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^3$$

$$=27x^3+27x^2\times\frac{1}{x^2}+9x\times\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}$$

$$=27x^3+27\cancel{x^2}\times\frac{1}{\cancel{x^2}}+\frac{9}{x^3}+\frac{1}{x^6}$$

$$=27x^3+27+\frac{9}{x^3}+\frac{1}{x^6}$$