T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 31 mars 2023

50 minutes

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

Soit ABCDEFGH un cube. On note I le symétrique de D par rapport à C.
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

1°) Donner un vecteur normal au plan (ACG). ………

2°) On suppose que toutes les arêtes du cube ont pour longueur 1 et on rapporte l'espace au repère orthonormé $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

Démontrer, en utilisant ce repère, que $(\mathrm{GA}) \perp (\mathrm{GI})$.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

Dans les exercices **II**, **III**, **IV**, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

II. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

À tout réel *m* on associe les vecteurs $\vec{u}\,(m\,; m\,; 1-m)$ et $\vec{v}\,(2m\,; -m\,; 1+m)$.

1°) Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2°) Compléter la phrase suivante par l'adjectif qui convient :

« Pour tout réel *m*, l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est ………… . »

3°) Dans cette question, on prend $m=1$. Calculer le cosinus de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remplir les cases au verso (case la plus à gauche : écrire une égalité ; case du milieu : écrire juste l'adjectif convenable ; case la plus à droite : écrire une égalité).

…………………………..	…………………………..	…………………………..

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Soit *P* et *Q* les plans d'équations cartésiennes respectives $2x+y-3z-5=0$ et $x+y+2z-8=0$.

La question 3°) est indépendante des deux premières questions.

1°) L'un des deux plans contient un point A dont toutes les coordonnées sont égales. Préciser ce point et préciser le plan auquel il appartient (case de gauche : écrire les coordonnées de A ; case de droite : écrire $\mathrm{A} \in$ …….).

…………………………..	…………………………..

2°) Calculer la distance de A au plan auquel il n'appartient pas. On donnera tout le détail du calcul.

……..

3°) On note *D* la droite d'intersection des plans *P* et *Q*.
Déterminer un système d'équations paramétriques de *D*.

IV. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points)

Soit *D* la droite définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=2t-1 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ et A le point de coordonnées $(3\,;3\,;4)$.

La question 3°) est indépendante des deux premières questions.

1°) Déterminer une équation cartésienne du plan *P* passant par A et orthogonal à *D*.
2°) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur *D*.
3°) Soit *S* la sphère de centre A et de rayon 5.
On note $\mathcal{C}$ le cercle d'intersection de *S* avec le plan $(x\mathrm{O}y)$.
Donner les coordonnées de son centre Ω et son rayon *r*.

…………………………..	…………………………..	………………	…………………

Corrigé de l'interrogation écrite du 31-3-2023

I.

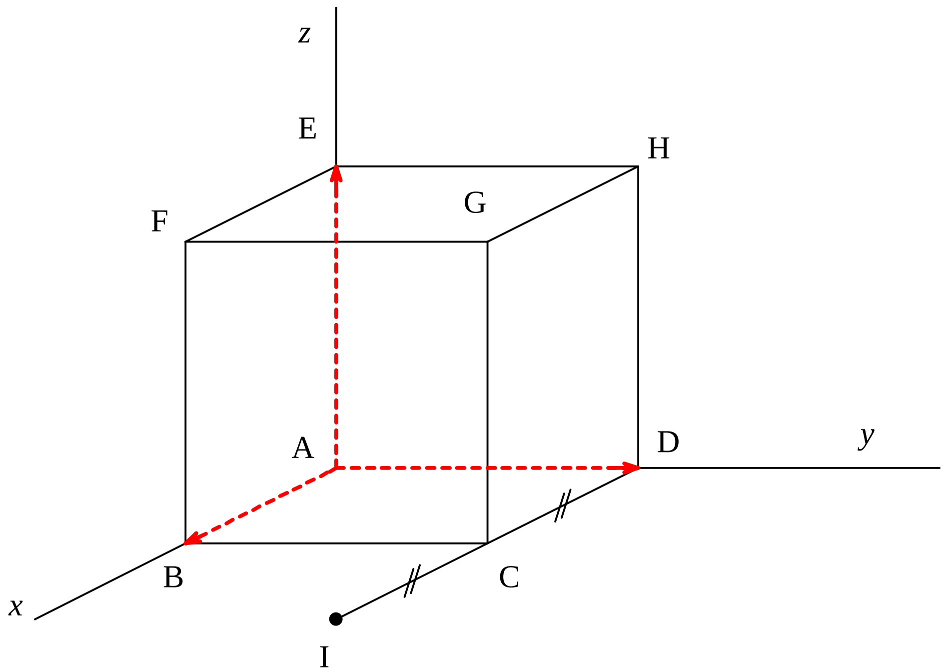
Soit ABCDEFGH un cube. On note I le symétrique de D par rapport à C.
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

1°) Donner un vecteur normal au plan (ACG). $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

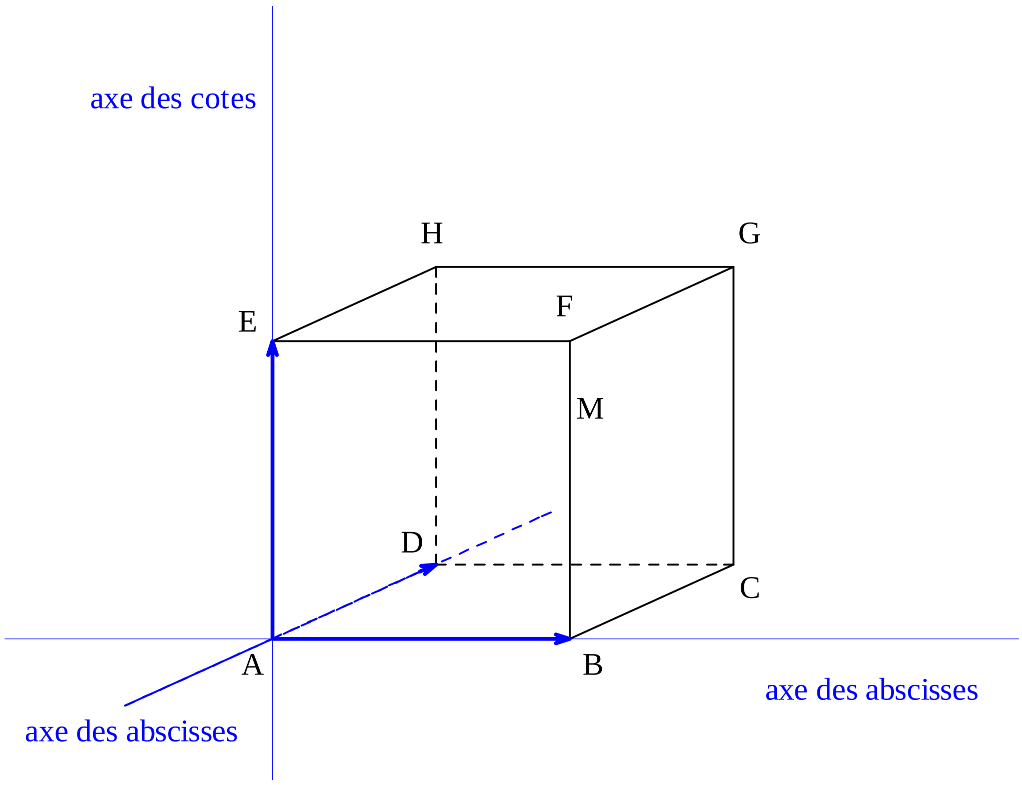
Autres réponses possibles : $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$; $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$; $\overrightarrow{\mathrm{GE}}$

2°) On suppose que toutes les arêtes du cube ont pour longueur 1 et on rapporte l'espace au repère orthonormé $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

Démontrer, en utilisant ce repère, que $(\mathrm{GA}) \perp (\mathrm{GI})$.



D'autres représentations en perspective sont possibles, par exemple en prenant ABFE pour face frontale.



A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	1	1	0	0	1	1	0	2
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0

On peut écrire les coordonnées de tous les points ou se contenter d'écrire uniquement les coordonnées des points A, G, I.
On peut donner directement les coordonnées de I (elles se lisent immédiatement sur la figure ; elles sont cependant très facile à justifier).

$\overrightarrow{\mathrm{GA}}(-1\,;-1\,;-1)$

$\overrightarrow{\mathrm{GI}}(1\,;0\,;-1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{GI}} &= -1\times1+(-1)\times0+(-1)+(-1)\times(-1)\\ &=0\end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{GA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{GI}}$ sont orthogonaux, ce qui entraîne $(\mathrm{GA})\perp(\mathrm{GI})$.

Dans les exercices **II**, **III**, **IV**, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

II.

À tout réel *m* on associe les vecteurs $\vec{u}\,(m\,;m\,;1-m)$ et $\vec{v}\,(2m\,;-m\,;1+m)$.

1°) Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2°) Compléter la phrase suivante par l'adjectif qui convient :

« Pour tout réel *m*, l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est ………… . »

3°) Dans cette question, on prend $m=1$. Calculer le cosinus de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remplir les cases au verso (case la plus à gauche : écrire une égalité ; case du milieu : écrire juste l'adjectif convenable ; case la plus à droite : écrire une égalité).

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$	aigu	$\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

1°)

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= m \times 2m + m \times (-m) + (1-m)(1+m) \\ &= 2m^2 - m^2 + 1 - m^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

2°)

Pour tout réel *m*, l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est aigu.

On applique la propriété suivante :

> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls de $\overrightarrow{E}$.
>
> - $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est aigu
> - $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est obtus
> - $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est droit

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ et par conséquent, l'angle $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est aigu.

3°)

$\vec{u}\,(1\,;1\,;0)$

$\vec{v}\,(2\,;-1\,;2)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

On reprend le résultat de la question 1°) où on a établi que le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est constant égal à 1 (donc indépendant de *m*).
Le résultat est donc valable en particulier pour $m = 1$.

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ soit $1 = 3\sqrt{2} \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$.

On en déduit que $\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$.

III.

Soit P et Q les plans d'équations cartésiennes respectives $2x+y-3z-5=0$ et $x+y+2z-8=0$.

La question 3°) est indépendante des deux premières questions.

1°) L'un des deux plans contient un point A dont toutes les coordonnées sont égales. Préciser ce point et préciser le plan auquel il appartient (case de gauche : écrire les coordonnées de A ; case de droite : écrire $\text{A} \in$ ....).

$\text{A}(2\,;2\,;2)$	$\text{A} \in Q$

On cherche à résoudre les équations $2x+x-3x-5=0$ et $x+x+2x-8=0$.

La première équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

La deuxième admet une seule solution dans $\mathbb{R}$: 2.

2°) Calculer la distance de A au plan auquel il n'appartient pas. On donnera tout le détail du calcul.

On applique la formule donnée par la propriété ci-dessous.

> Soit P un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, a, b, c étant trois réels tels que $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$.
>
> La distance du point $\text{A}(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ au plan P est donnée par la formule :
>
> $$\text{d}(\text{A}, P) = \frac{|\,ax_0+by_0+cz_0+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

$$\text{d}(\text{A}, P) = \frac{|\,2\times2+2-3\times2\,|}{\sqrt{4+1+9}}$$

$$= \frac{|-5|}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{14}}$$

3°) On note D la droite d'intersection des plans P et Q.
Déterminer un système d'équations paramétriques de D.

Le vecteur $\vec{u}(2\,;1\,;-3)$ est un vecteur normal à P et le vecteur $\vec{v}(1\,;1\,;2)$ est un vecteur normal à Q.
On vérifie aisément que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

On en déduit que P et Q ne sont pas parallèles. Ils sont donc sécants selon une droite D.

Pour déterminer un système d'équations paramétriques de D, on considère le système $\begin{cases} 2x+y-3z-5=0 \\ x+y+2z-8=0 \end{cases}$.

Ce système est équivalent à $\begin{cases} 2x+y=5+3z & (1) \\ x+y=8-2z & (2) \end{cases}$.

On pose $z=t \quad (t\in\mathbb{R})$.

Les équations (1) et (2) donnent alors les équations $2x+y=5+3t \quad (1')$ et $x+y=8-2t \quad (2')$.

On résout alors le système linéaire $\begin{cases} (1') \\ (2') \end{cases}$ de deux équations à deux inconnues avec le paramètre t.

Le déterminant est non nul donc le système admet un unique couple solution.
On peut utiliser la méthode des multiplicateurs ou la méthode matricielle ou même appliquer directement es formules de Cramer.

$$\begin{cases} 2x+y=5+3t \\ x+y=8-2t \end{cases} \left| \begin{array}{c} \times 1 \\ \times(-1) \end{array} \right| \begin{array}{c} \times(-1) \\ \times 2 \end{array}$$

$\begin{cases} (1') \\ (2') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5t-3 \\ y=11-7t \end{cases}$

Un système d'équations paramétriques de D s'écrit donc $\begin{cases} x=5t-3 \\ y=11-7t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$.

On peut aussi résoudre le système $\begin{cases} (1') \\ (2') \end{cases}$ par substitution : $\begin{cases} x=5t-3 \\ y=8-2t-(5t-3) \end{cases}$, qui donne $\begin{cases} x=5t-3 \\ y=11-7t \end{cases}$.

Si on prend y pour paramètre en posant $y=t \quad (t\in\mathbb{R})$, on doit résoudre le système $\begin{cases} 2x-3z=5-t \\ x+2z=8-t \end{cases} \left| \begin{array}{c} \times 1 \\ \times 3 \end{array} \right| \begin{array}{c} \times(-1) \\ \times 2 \end{array}$.

Les multiplicateurs placés à droite du système donnent par combinaisons linaires les égalités suivantes $\begin{cases} 7x=34-5t \\ 7z=11-t \end{cases}$.

On obtient donc le système d'équations paramétriques de D suivant : $\begin{cases} x=\dfrac{34}{7}-\dfrac{5}{7}t \\ z=\dfrac{11}{7}-\dfrac{1}{7}t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

Sur la calculatrice Numworks, on peut utiliser l'astuce du π pour résoudre le système $\begin{cases} 2x+y-3z-5=0 \\ x+y+2z-8=0 \end{cases}$.

On remplace par exemple z par π ou e.

IV.

Soit D la droite définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$ $\left(t \in \mathbb{R}\right)$ et A le point de coordonnées $\left(3\,;3\,;4\right)$.

La question 3°) est indépendante des deux premières questions.

1°) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A et orthogonal à D.
2°) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur D.
3°) Soit S la sphère de centre A et de rayon 5.
On note $\mathcal{C}$ le cercle d'intersection de S avec le plan $\left(x\text{O}y\right)$.
Donner les coordonnées de son centre Ω et son rayon r.

$2x + y + 2z - 17 = 0$	$\text{H}\left(\dfrac{38}{9}\,;\dfrac{19}{9}\,;\dfrac{29}{9}\right)$	$\left(3\,;3\,;0\right)$	$r = 3$

1°) Le vecteur $\vec{u}\left(2\,;1\,;2\right)$ est un vecteur directeur de D donc comme P est orthogonale à D, c'est un vecteur normal à P.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $\left(x\,;y\,;z\right)$.

$$\text{M} \in P \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{AM}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\times\left(x-3\right)+1\times\left(y-3\right)\times+2\times\left(z-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y + 2z - 17 = 0$$

Une équation cartésienne de P s'écrit donc $2x + y + 2z - 17 = 0$.

2°) Le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite D.
Par définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite, H est le point d'intersection de D et P (car D est orthogonale à P par hypothèse).
Le paramètre t du point H vérifie donc l'équation : $2\times 2t + t + 2\left(2t-1\right) - 17 = 0 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow 9t - 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{19}{9}$$

On a donc $\begin{cases} x_{\text{H}} = \dfrac{38}{9} \\ y_{\text{H}} = \dfrac{19}{9} \\ z_{\text{H}} = \dfrac{29}{9} \end{cases}$.

3°) Il n'est pas nécessaire d'utiliser une équation de *S*. On utilise le cours sur l'intersection d'une sphère et d'un plan.

S : sphère de centre O et de rayon *R*
P : plan de l'espace
H : projeté orthogonal de O sur *P*
On pose $d = \text{OH} = \text{d}(\text{O}, P)$.

1^{er} cas : $\boxed{d < R}$

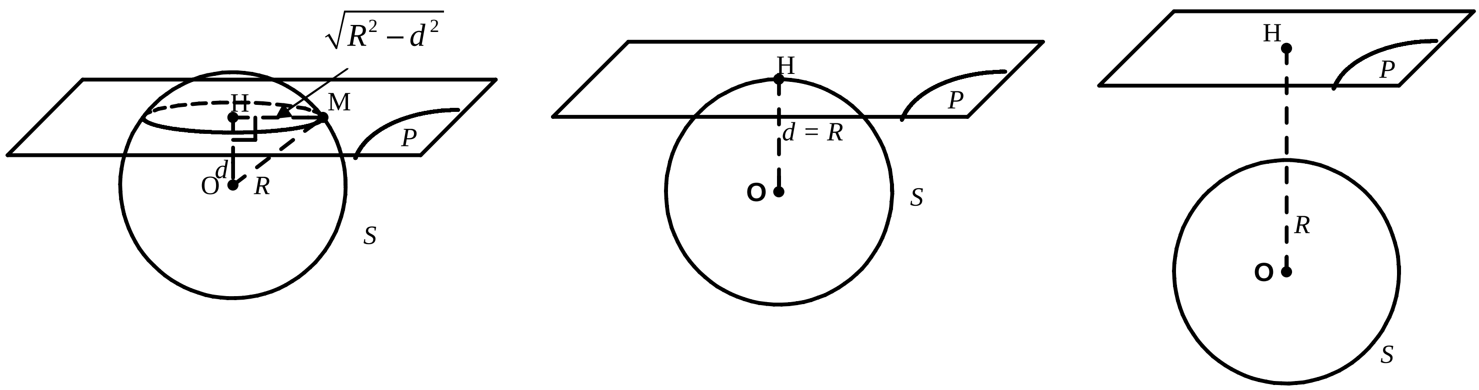
S et *P* sont sécants suivant un cercle $\mathcal{C}$
$S \cap P = \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}$: cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (théorème de Pythagore)

2^e cas : $\boxed{d = R}$

S et *P* sont tangents en H ($S \cap P = \{\text{H}\}$)

3^e cas : $\boxed{d > R}$

S et *P* n'ont aucun point commun ($S \cap P = \varnothing$)



La distance de A au plan (xOy) est égale à 4 (évident, c'est la valeur absolue de la cote de A).

On peut écrire $\text{d}(\text{A}, (xOy)) = |\ z_\text{A}\ | = |\ 4\ | = 4$.

On applique la formule donnant la distance d'un point à un plan de base dans un repère orthonormé.

Rappel :

La distance d'un point à un plan est la distance entre ce point et son projeté orthogonal sur le plan.

On a une propriété qui dit que c'est la plus petite distance entre ce point et un point quelconque du plan.

Dans un repère orthonormé, on sait que la distance d'un point au plan (xOy) est égale à la valeur absolue de sa cote.

Il n'y a pas de calcul à faire.

Comme la distance de A au plan $(x\mathrm{O}y)$ est strictement inférieure au rayon de S, on peut affirmer que S coupe le plan $(x\mathrm{O}y)$ suivant un cercle $\mathcal{C}$.

Le centre Ω de $\mathcal{C}$ est le projeté orthogonal de A sur le plan $(x\mathrm{O}y)$; il a pour coordonnées $(3\,;3\,;0)$.

Le résultat est évident. Il s'agit de l'application de la propriété du cours suivante que l'on retrouve facilement en faisant un graphique.

> Propriété :
>
> Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.
>
> • Le projeté orthogonal de M sur le plan $(x\mathrm{O}y)$ a pour coordonnées $(x\,;y\,;0)$.
>
> • Le projeté orthogonal de M sur le plan $(y\mathrm{O}z)$ a pour coordonnées $(0\,;y\,;z)$.
>
> • Le projeté orthogonal de M sur le plan $(x\mathrm{O}z)$ a pour coordonnées $(x\,;0\,;z)$.

Le rayon de $\mathcal{C}$ s'obtient par l'égalité $r=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$ (application du théorème de Pythagore).