TS

Exercices sur le dénombrement

Aucune rédaction n'est demandée.
Pour les calculs de combinaisons, on n'hésitera pas à utiliser la calculatrice dès que les calculs sont un peu pénibles.

1 On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie. On note chaque fois le côté visible dans l'ordre. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

2 Déterminer le nombre de codes de trois chiffres que l'on peut former à l'aide de 0, 1, 2, 3,…, 9
1°) chaque chiffre n'étant utilisé qu'une seule fois ;
2°) chaque chiffre pouvant être répété.

3 Dans une pièce de théâtre, il y a six rôles qui peuvent être tenus par n'importe lesquelles des vingt personnes d'une troupe. Combien y a-t-il de distributions possibles ?

4 Une équipe de trois joueurs de pétanque a gagné un tournoi. Chacun a le choix d'un lot parmi les neuf proposés. Combien y a-t-il de choix possibles ?

5 Dans une association, le bureau est composé de dix personnes : six hommes et quatre femmes.
Les membres se réunissent pour choisir un président, un trésorier et un secrétaire.
1°) Combien y a-t-il de choix possibles au total ?
2°) Combien y a-t-il de choix possibles tels que le président soit un homme et le trésorier une femme ?

6 Une urne contient neuf jetons numérotés de 1 à 9. On en tire quatre successivement et sans remise (on en tire une, on ne le remet pas ; on en tire un deuxième, on ne le remet pas ; on en tire un troisième, on ne le remet pas ; on en tire un quatrième).
Quel est le nombre total de choix possibles ?

7 Seize chevaux courent. Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ?
« Les tiercés c'est les trois premiers. »
Il s'agit de déterminer le nombre de « trios » que l'on peut former avec les seize chevaux.
Former un tiercé dans l'ordre consiste à donner une liste ordonnée de trois chevaux (ordonnée selon l'ordre d'arrivée qu'on pense être le bon).

8 On tire successivement trois cartes d'un jeu de trente-deux cartes sans remise.
1°) Combien y a-t-il de choix possibles ?
2°) Combien y a-t-il de choix possibles ne contenant aucun roi ?
3°) Combien y a-t-il de choix possibles contenant au moins un roi ?

9 On veut colorier les six bandes verticales d'un drapeau. Chacune des bandes verticales est coloriée avec une couleur choisie parmi l'une des cinq couleurs suivantes : rouge, jaune, vert, bleu, blanc. Les couleurs sont choisies de telle sorte que deux bandes voisines soient coloriées avec des couleurs différentes.
Dénombrer tous les coloriages possibles.

10 On lance six fois de suite un dé cubique. On note chaque fois le numéro de la face supérieure dans l'ordre.
1°) Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2°) Combien peut-on obtenir de résultats où tous les numéros sont supérieurs ou égaux à quatre ?
3°) Combien peut-on obtenir de résultats où ne figure pas le numéro 1 ?
4°) Combien peut-on obtenir de résultats où figure au moins une fois le numéro 1 ?

11 1°) Soit n un entier naturel quelconque. Simplifier $\dfrac{(n+1)!}{n!}$.
2°) Soit n un entier naturel non nul. Simplifier $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

12 Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « ALICE »
1°) au total ;
2°) commençant par E ;
3°) commençant par une voyelle ;
4°) commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

13 1°) Lors d'une conférence, neuf personnes doivent prendre place sur neuf sièges alignés sur une estrade. De combien de manières ces personnes peuvent-elles s'asseoir ?
2°) Même question autour d'une table circulaire, les places n'étant pas numérotées.
Deux dispositions sont identiques si chaque personne a les mêmes voisins.
On observera que pour faire une disposition circulaire, on peut fixer la place d'une personne qui sert de repère.

14 Une association est composée de cinq hommes et de huit femmes. Elle doit choisir trois délégués.
1°) Combien y a-t-il de délégations possibles ?
2°) Combien y a-t-il de délégations possibles composées de trois femmes ?
3°) Combien y a-t-il de délégations possibles comprenant au moins un homme ?

15 Pour construire une grille de mots croisés de huit lignes et six colonnes, on noircit huit cases.
Combien de grilles possibles peut-on ainsi obtenir ?

16 Une agence de voyages américaine propose un tour de l'Europe en huit jours permettant aux touristes de visiter quatre capitales européennes en passant deux jours dans chacune.
1°) Le client doit choisir ces quatre capitales parmi les villes suivantes : Paris, Londres, Berlin, Rome, Madrid et Lisbonne. Combien y a-t-il de choix possibles (on ne tient pas compte de l'ordre des villes visitées) ?
2°) La société décide d'élargir le choix qu'elle propose en ajoutant la visite de deux nouvelles capitales : Prague et Vienne. Combien de nouvelles formules crée-t-elle ainsi ?

17 A et B font partie d'un club de dix-huit personnes. On doit former un groupe de cinq personnes.
Combien y a-t-il de groupes possibles
1°) au total ?
2°) dans lesquels figure A ?
3°) dans lesquels A et B figurent ensemble ?
4°) dans lesquels A et B ne figurent pas ensemble ?

18 Seize chevaux courent. Combien y a-t-il de tiercés dans le désordre ?

Un tiercé dans le désordre est une liste non ordonnée de 3 chevaux.

19 On tire simultanément trois cartes d'un jeu de trente-deux cartes.
On dit que l'on obtient une « main » de trois cartes.
Combien y a-t-il de mains possibles
1°) au total ?
2°) contenant le roi de cœur ?
3°) contenant une seule dame ?
4°) ne contenant pas de valet ?
5°) contenant au moins un valet ?

20 Quinze personnes se rencontrent. Chacune d'elles serre la main de chacune des autres.
Quel est le nombre total de poignées de mains échangées ?

$\boxed{21}$ Le tournoi de rugby des VI Nations se joue entre six équipes. Chaque équipe doit rencontrer une fois et une seule les cinq autres équipes. Combien y a-t-il de matchs joués en tout ?

$\boxed{22}$ Combien de codes peut-on former en mélangeant quatre 1 et trois 0 ?
(**Exemple :** 1 ; 1 ; 0 ; 1 ; 0 ; 0 ; 1).

$\boxed{23}$ Soit n et p deux entiers naturels tels que l'on ait $p \leqslant n$. Simplifier $\dfrac{\dbinom{n+1}{p}}{\dbinom{n}{p}}$.

$\boxed{24}$ Faire le triangle de Pascal et développer $(2x-1)^5$.
Vérifier sur la calculatrice en utilisant la « technique du π » ou avec le site dcode.

$\boxed{25}$ Donner la forme développée de $(x+3)^{20}$ sous forme d'une somme ; en déduire le coefficient de x^{17} dans le développement de $(x+3)^{20}$.
Vérifier sur la calculatrice en utilisant la « technique du π » ou avec le site dcode.

$\boxed{26}$ **Inégalité de Bernoulli**
À l'aide de la formule du binôme de Newton démontrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ (cette inégalité s'appelle l'inégalité de Bernoulli).
En utilisant la même méthode, démontrer que que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $(1+x)^n \geqslant 1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$.

On souhaite « élargir » l'inégalité de Bernoulli démontrant qu'elle reste valable pour $x \geqslant -1$. Pour cela, on propose deux méthodes indépendantes l'une de l'autre.

1$^{\text{ère}}$ méthode :
On souhaite démontrer le résultat par récurrence sur n, x étant fixé supérieur ou égal à – 1.
1°) Vérifier que, pour tout entier naturel n et tout réel x, on a $(1+nx)(1+x)=1+(n+1)x+nx^2$.
2°) Énoncer la proposition $P(n)$ à démontrer.
3°) Rédiger la démonstration.

2$^{\text{e}}$ méthode :
On fixe un entier naturel n.
On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
1°) Démontrer que f est convexe sur l'intervalle $[-1, +\infty[$.
2°) Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.
3°) Conclure.

Réponses

Il est important de signaler s'il s'agit d'un tirage avec ou sans remise.

1 On utilise la méthode des cases.
On peut juste mettre les cases sans rédaction.

Une pièce a deux côtes : pile et face.
Si on lance quatre fois de suite la pièce de monnaie, il y a chaque fois 2 résultats possibles.

1^{er} lancer	2^{e} lancer	3^{e} lancer	4^{e} lancer
2	2	2	2

Il y a $2^4 = 16$ résultats possibles.

2 Un code est une liste ordonnée de 3 chiffres (par exemple, (3 ; 5 ; 0)).

1°) **Codes sans répétition**

1^{er} chiffre	**2^{e} chiffre**	**3^{e} chiffre**
10	9	8

Pour remplir la $1^{ère}$ case, il y a 10 possibilités (puisqu'il y a dix chiffres de 0 à 9).
Pour remplir la 2^{e} case, il y a $10-1=9$ possibilités (puisque l'on dénombre les codes sans répétition).
Pour remplir la 3^{e} case, il y a $9-1=8$ possibilités.

Principe multiplicatif : $10\times9\times8=720$

Il y a 720 codes sans répétition.

2°) **Codes avec répétition**

1^{er} chiffre	**2^{e} chiffre**	**3^{e} chiffre**
10	10	10

$10^3 = 1000$

Il y a 1000 codes avec répétition.

Autre rédaction :

1°) Sans répétition, il y a $10\times9\times8=720$ possibilités.
2°) Avec répétition, il y a 10^3 possibilités, soit 1000 possibilités.

3 Une personne ne peut avoir deux rôles.

20	19	18	17	16	15

Il y a donc $20\times19\times18\times17\times16\times15=$ **27 907 200** distributions possibles.

4 Chacun n'a qu'un lot sans remise en jeu (aucun lot n'est remis en jeu).

9	8	7

Il y a $9\times8\times7=$ **504** possibilités.

Pour plus de clarté, l'énoncé devrait dire que chaque lot est en un seul exemplaire.

5 1°) Le président, le trésorier, le secrétaire peuvent être un homme ou une femme.
Une même personne ne peut pas occuper deux charges différentes.

Il y a 10 personnes, chacune ne pouvant occuper qu'une charge (une personne ne peut cumuler deux charges).

P	**T**	**S**
10	9	8

Il y a donc $10\times9\times8=$ **720** possibilités.

2°) On a 6 hommes et 4 femmes.
Les deux premières charges ayant été distribuées, il reste 8 possibilités pour la charge de secrétaire.

P	T	S
6	4	8

(Il y a 8 choix possibles pour le secrétaire puisque l'on a déjà choisi deux personnes pour le président et le trésorier.)

Il y a donc $6\times4\times8=$ **192** cas possibles (le secrétaire peut être un homme ou une femme).

6 3 024

7 Il y a $16\times15\times14=3360$ tiercés dans l'ordre.
Explication :

Il y a 16 possibilités pour le 1^{er} cheval.
Il y a 15 $(16-1)$ possibilités pour le 2^{e} cheval.
Il y a 14 $(15-1)$ possibilités pour le 3^{e} cheval.

8 Les 3 questions sont indépendantes et se réfèrent toutes au même énoncé.

1°) $32\times31\times30=29\,760$

2°) Il y a quatre rois dans un jeu.

$32-4=28$

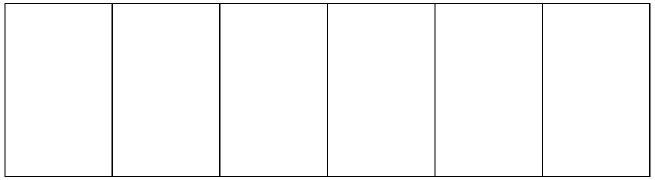
$28\times27\times26=19\,656$ tirages ne contenant aucun roi.

3°)

1^ère^ méthode : On raisonne par cas contraire. On fait la différence entre le résultat du 1°) et le résultat du 2°).
On trouve : 10 104

2^e^ méthode : On effectue une disjonction de cas en considérant les cas où l'on a exactement un roi, les cas où l'on a exactement deux rois et les cas où l'on a exactement trois rois.
Cette deuxième méthode est difficile à mettre en œuvre à ce stade d'avancement du cours.
Erreur possible dans le dénombrement d'un « au moins ».

9 Faire un dessin pour représenter le drapeau (les bandes doivent être verticales comme il est dit dans l'énoncé).



1^ère^ bande	2^e^ bande	3^e^ bande	4^e^ bande	5^e^ bande	6^e^ bande
5	4	4	4	4	4

On remplit les cases de gauche à droite.

Pour la 1^ère^ bande, il y a 5 choix possibles de couleurs.
Pour la 2^e^ bande, il y a 4 choix possibles de couleurs car on ne peut pas reprendre la couleur de la bande précédente.
Pour la 3^e^ bande, il y a 4 choix possibles puisque l'on ne peut pas reprendre la couleur de la bande précédente mais on peut reprendre la couleur de la 1ère bande.
Pour la 4^e^ bande, il y a 4 puisque l'on ne peut pas reprendre la couleur de la bande précédente mais on peut reprendre la couleur de la 1^ère^ et de la 2^e^ bande.
Pour la 5^e^ bande, il y a 4 puisque l'on ne peut pas reprendre la couleur de la bande précédente mais on peut reprendre la couleur des 1^ère^, 2^e^, 3^e^ bandes.
Pour la 6^e^ bande, il y a 4 puisque l'on ne peut pas reprendre la couleur de la bande précédente mais on peut reprendre la couleur des 1^ère^, 2^e^, 3^e^, 4^e^ bandes.

$5\times4\times4\times4\times4\times4=5120$

10

1°) $6^6=46\,656$

2°) $3^6=729$

3°) $5^6=15\,625$

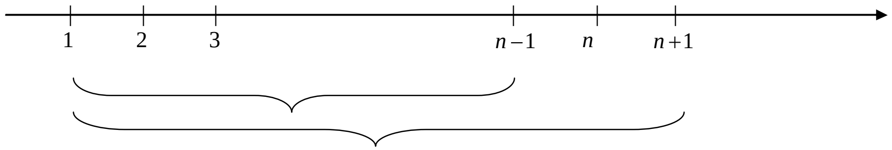
4°) On raisonne par cas contraire.

$46\,656-15\,625=31\,031$

11 Méthode : On « développe » les factorielles*.

1°) $\dfrac{(n+1)!}{n!}=\dfrac{n!\times(n+1)}{n!}=n+1$

2°) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=\dfrac{\text{produit de tous les entiers de 1 à }(n+1)}{\text{produit de tous les entiers de 1 à }(n-1)}=\dfrac{1\times2\times\ldots\times(n+1)}{1\times2\times\ldots\times(n-1)}=\dfrac{\cancel{(n-1)!}\times n\times(n+1)}{\cancel{(n-1)!}}=n(n+1)$



L'entier qui suit $n-1$ est égal à n ; l'entier qui suit n est égal à $n+1$.
Tous les facteurs du produit du bas se retrouvent en haut.

* Qu'est-ce que ça veut dire « développer une factorielle » ?
Ça veut dire écrire la factorielle comme produit, éventuellement avec des petits points de suspension.

12

1°) $5\,!=120$

2°) $1\times4\times3\times2\times1=24$ (méthode des cases)

3°) $3\times4\times3\times2\times1=72$

4°) On raisonne par choix successifs.
On définit 5 opérations successives qui sont définies dans un ordre contraire à la logique (ordre anti-naturel).

Opération O_1 : choix de la 1^ère^ lettre → 3 possibilités (puisqu'il y a trois voyelles)

Opération O_2 : choix de la 5^e^ lettre → 2 possibilités (puisqu'il y a deux consonnes)

Opération O_3 : choix de la 2^e^ lettre → 3 possibilités (puisque l'on a déjà choisi deux lettres)

Opération O_4 : choix de la 3^e^ lettre → 2 possibilités

Opération O_5 : choix de la 4^e^ lettre → 1 possibilité

On applique le principe multiplicatif : $3\times2\times3\times2\times1=36$.

13

1°) 9 != 362 880

2°) Le résultat est de 8 ! = 40 320.

Autre méthode par rapport à celle préconisée dans l'énoncé :

On divise le résultat précédent par 9 : $\frac{9!}{9}=8!$.
En effet, chaque disposition en ligne donne une disposition en cercle avec les places numérotées.
Comme les places ne sont pas numérotées, en effectuant une rotation ayant pour centre le centre du cercle et d'angle $\left(\frac{360}{9}\right)^{\circ}=40°$, on obtient la même disposition (faire une figure).
De même, pour les rotations ayant pour centre le centre du cercle et d'angle 80°, 120°, 160°, …., 320°.
Bref, il y a neuf rotations ayant pour centre le centre du cercle et qui laissent invariante chaque disposition.
Les dispositions en cercle sont invariantes par les neuf rotations.

14 Cela s'assimile à un tirage simultané de 3 boules dans une urne contenant 13 boules (on les prend en même temps, par « paquet » de 3).
Quand on fait nos propres délégués, on met deux prénoms par papier.
Les tirages sont des sous-ensembles non ordonnés.

On utilise les combinaisons.

1°) Choisir une délégation de 3 personnes revient à choisir une combinaison de 3 éléments pris parmi 13 (les trois délégués ont le même rôle).
Il n'y a pas de notion d'ordre qui intervient (on ne choisit pas un 1er délégué, puis un 2^{e} et un 3^{e} ; on choisit les 3 en même temps).

$\binom{13}{3}=\frac{13!}{3!\times 10!}=\frac{13\times 12\times 11}{1\times 2\times 3}=286$ délégations au total

On peut aussi prendre la calculatrice pour calculer $\binom{13}{3}$.

2°) $\binom{8}{3}=56$ délégations ne comprenant que des femmes

3°)

1ère méthode :

On effectue la différence entre le nombre de délégations total et le nombre de délégations ne comprenant que des femmes.

$286-56=230$ délégations comprenant au moins un homme

2^{e} méthode :

On calcule le nombre de délégations comprenant exactement 1 homme, exactement 2 hommes, exactement 3 hommes.

15

Une grille de mots croisés comporte 48 cases.

$\binom{48}{8}=377\ 348\ 994$ grilles de mots croisés possibles

16

1°) $\binom{6}{4}=15$ formules possibles

2°) $\binom{8}{4}-\binom{6}{4}=70-15=55$ nouvelles formules

17

1°) $\binom{18}{5}=8568$

2°) $\binom{1}{1}\times\binom{17}{4}=2380$ (on choisit A puis 4 personnes parmi les 17 autres que A)

3°) $\binom{2}{2}\times\binom{16}{3}=560$ (on choisit A et B puis 3 personnes parmi les 16 autres que A et B)

4°) On fait la différence :
(nombre total de groupes de 5) – (nombre de groupes où A et B figurent ensemble) = 8008

18 $\binom{16}{3}=560$ tiercés dans le désordre

19

1°) $\binom{32}{3}=4960$

2°) $\binom{1}{1}\times\binom{31}{2}=465$

1 carte parmi une seule

2 cartes parmi toutes celles restantes

3°) $\binom{4}{1}\times\binom{28}{2}=1512$

4°) On enlève les 4 valets ; il reste 28 cartes autres que les valets ; on prend 3 cartes parmi ces 28.

$$\binom{28}{3}=3276$$

5°) Le plus simple est de faire la différence entre le nombre total de mains et le nombre de mains ne contenant aucun valet.

$$\binom{32}{3}-\binom{28}{3}=1684$$

$\boxed{\textbf{20}}$

Le nombre de poignées de mains échangées est égal au nombre de façons de choisir deux personnes parmi les 15 : $\binom{15}{2}=105$.

Autre raisonnement :

La $1^{\text{ère}}$ personne doit serrer la main de 14 personnes.
La 2^{e} personne doit serrer la main de 13 personnes.
.
.
.

On fait la somme.

$$14+13+12+\ldots+1=\frac{14\times 15}{2}=7\times 15=105$$

$\boxed{\textbf{21}}$ Le nombre de matchs possibles est égal au nombre de façons de choisir 2 équipes parmi 6 : $\binom{6}{2}=15$.

Le nombre de matchs possibles est égal au nombre de combinaisons de 2 éléments pris parmi 6.

Autre raisonnement :

La $1^{\text{ère}}$ équipe peut rencontrer 5 équipes.
La 2^{e} équipe peut rencontrer 4 équipes.

.
.
.

On fait la somme.

$$5+4+3+\ldots+1=15$$

On retrouve le même résultat qu'avec la $1^{\text{ère}}$ méthode.

$\boxed{\textbf{22}}$ Un code est un nombre formé de 7 chiffres composé de quatre 1 et de trois 0.

On fait des cases pour visualiser (et uniquement pour cela).

On choisit la place des 1. On choisit donc 4 cases parmi les 7.
La place des 0 est alors automatiquement fixée puisque les 0 vont occuper les autres cases (une fois qu'on a la place des 1, on a la place des 0).

On trouve alors : $\binom{7}{4}=35$.

On peut aussi procéder en choisissant la place des 0 : $\binom{7}{3}=35$ (ce qui donne le même résultat par la règle de symétrie $\binom{7}{4}=\binom{7}{3}$).

Autre façon : avec les anagrammes (il s'agit d'anagrammes avec répétitions)

On peut aussi faire la même méthode qu'avec les anagrammes avec répétition :

$$\frac{7!}{4!\times 3!}$$

$\boxed{\textbf{23}}$ On développe les combinaisons avec les factorielles.

$$\frac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}}=\frac{\dfrac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}}{\dfrac{n!}{p!(n-p)!}}=\frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}\times\frac{p!(n-p)!}{n!}=\frac{\cancel{n!}\times(n+1)}{\cancel{p!}(n+1-p)!}\times\frac{\cancel{p!}(n-p)!}{\cancel{n!}}=\frac{(n+1)\times\cancel{(n-p)!}}{\cancel{(n-p)!}(n-p+1)}=\frac{n+1}{n+1-p}$$

$\boxed{\textbf{24}}$

On fait le triangle de Pascal.

$$(2x-1)^5=32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1$$

N.B. : Mieux vaut éviter d'utiliser la formule du binôme de Newton qui serait un peu lourde dans le cas présent.
Dans ce cas, on introduit un entier k.

$$(2x-1)^5=\sum_{k=0}^{k=5}\binom{5}{k}\times(2x)^k\times(-1)^{5-k}$$

Remarque : Une calculatrice ou un logiciel de calcul formel permettent d'obtenir directement ce résultat.

$\boxed{25}$

D'après la formule du binôme de Newton, on a : $(x+3)^{20}=\sum_{k=0}^{k=20}\binom{20}{k}\times x^k\times 3^{20-k}$.

Le coefficient de x^{17} dans le développement de $(x+3)^{20}$ est égal à : $\binom{20}{17}\times 3^{20-17}=\dfrac{20\times 19\times 18}{1\times 2\times 3}\times 3^3=30780$.

Meilleure version :

On a : $(x+3)^{20}=(3+x)^{20}$.

Par conséquent, il y a deux possibilités d'écrire le développement :

$$\sum_{k=0}^{k=20}\binom{20}{k}\times x^k\times 3^{20-k}$$

$$\sum_{l=0}^{l=20}\binom{20}{l}\times x^{20-l}\times 3^{l}$$

On a utilisé la variable k pour la 1ère somme et la variable l pour la 2e somme (ce sont des variables muettes, on peut choisir les variables que l'on veut pour écrire les sommes).

Écriture en extension des sommes

1ère somme : $\binom{20}{0}\times x^0\times 3^{20-0}+\binom{20}{1}\times x^1\times 3^{20-1}+\ldots$
(pour $k=0$ jusqu'à $k=20$)

2e somme : $\binom{20}{0}\times x^{20}\times 3^0+\binom{20}{1}\times x^{19}\times 3^1+\ldots$
(pour $l=0$ jusqu'à $l=20$)

Les deux développements sont en fait les mêmes (principe de symétrie).

On obtient le terme en x^{17} en prenant $k=17$ dans la première somme et en prenant $l=3$ dans la seconde somme.

Le terme en x^{17} est : $\binom{20}{17}\times x^{17}\times 3^{20-17}$

L'énoncé demande le coefficient de x^{17} : $\binom{20}{17}\times 3^{20-17}=\dfrac{20\times 19\times 18}{1\times 2\times 3}\times 3^3=30780$.

Vérification à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.

Meilleure version de l'exercice $\boxed{13}$:

1°) Trois personnes s'installent autour d'une table circulaire. Représenter sur un dessin toutes les dispositions possibles ; en déduire le nombre de dispositions possibles autour de la table.

2°) Reprendre la question précédente avec quatre personnes.

3°) Déterminer le nombre de dispositions possibles de n personnes (n entier naturel supérieur ou égal à 3) autour d'une table circulaire.
Indication : On observera que pour faire une disposition circulaire, on peut fixer la place d'une personne qui sert de repère.

Corrigé :

1°) 2

2°) 6

3°) Pour faire une disposition circulaire, on peut fixer la place d'une personne qui sert de repère.
Les autres personnes ont alors $(n-1)!$ façons possibles de se placer.

Le nombre de dispositions possibles de n personnes autour d'une table est égal à $(n-1)!$.
Pour faire une disposition circulaire, on peut fixer la place d'une personne qui sert de repère.

Une erreur classique

On tire deux cartes au hasard simultanément d'un jeu de trente-deux cartes.
On désire calculer le nombre de résultats possibles contenant au moins un roi.

On va étudier deux solutions justes puis une solution erronée.

Solution 1

Calculer le nombre total de tirages de deux cartes.
Calculer le nombre total de tirages ne contenant aucun roi.
En déduire le nombre de tirages contenant au moins un roi.

Solution 2

Calculer le nombre total de tirages de deux cartes contenant exactement un roi.
Calculer le nombre total de tirages de deux cartes contenant exactement deux rois.
En déduire le nombre de tirages contenant au moins un roi.

Étude d'une solution erronée

On utilise le raisonnement suivant : pour former un tirage contenant au moins un roi, on choisit d'abord une carte parmi les quatre rois puis on choisit une carte parmi les 31 cartes restantes.
Cela se traduit par le calcul $\binom{4}{1}\times\binom{31}{1}$.
Effectuer le calcul précédent pour constater que le résultat obtenu est supérieur au résultat trouvé avec les deux méthodes précédentes.
Il y a donc une erreur. Pourtant le raisonnement semble juste ! Où est l'erreur ?
Avec le raisonnement précédent, on compte plusieurs fois le même cas.
En effet, avec le raisonnement précédent il se peut très bien que l'on choisisse d'abord le roi de cœur pour la première carte puis le roi de carreau pour la deuxième carte.
Mais cela revient au même que la démarche qui consiste à choisir d'abord le roi de carreau puis ensuite le roi de cœur.