T
exp

Interrogation écrite du jeudi 6 avril 2023
(50 minutes)

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………… **Note : ….. / 20**

Une feuille annexe est jointe au sujet.
On donnera les résultats des probabilités sous la forme de fractions irréductibles.

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

Un insecte se déplace sur un cube ABCDEFGH en parcourant à chaque étape l’une des arêtes choisie au hasard parmi celles à sa disposition.

1°) On note $\mathcal{G}$ le graphe probabiliste dont les sommets sont désignés par les lettres A, B, C, D, E, F, G, H en référence aux sommets du cube. On note également T la matrice de transition en colonnes associée à $\mathcal{G}$.
Exprimer T en fonction de la matrice M donnée sur la feuille annexe. ………… (une seule égalité)

2°) On suppose que l’insecte part de A et effectue 3 étapes.
Calculer la probabilité des événements X : « L’itinéraire s’achève en un point voisin de A » et
Y : « L’itinéraire s’achève en un point diamétralement opposé à A sur une face, c’est-à-dire en C, F ou H ».

3°) On suppose que l’insecte part de A et effectue 4 étapes.
Calculer la probabilité de l’événement Z : « L’itinéraire s’achève en A ».

2°)		

3°)	

II. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 3 points)

On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées et on effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :
à l’étape 1, on lance les 2 pièces et on note les côtés qu’elles présentent,
à l’étape 2, on lance les pièces ayant présenté le côté pile à l’étape 1 (s’il en existe),
à l’étape 3, on lance les pièces ayant présenté le côté pile à l’étape 2 (s’il en existe),
et ainsi de suite.
On suppose que les lancers successifs éventuels d’une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l’une de l’autre.

1°) À chaque étape, on est soit dans l’état X : « Les deux pièces présentent le côté face », soit dans l’état Y : « L’une des deux pièces présente le côté pile et l’autre le côté face », soit dans l’état Z : « Les deux pièces présentent le côté pile ».
Sur la feuille annexe, on donne le graphe probabiliste $\mathcal{G}$ modélisant la situation.
Écrire dans l’espace ci-contre la matrice de transition T en colonnes associée à $\mathcal{G}$.

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note x_n, y_n, z_n les probabilités d’être respectivement dans les états X, Y, Z à l’étape n.
Compléter les égalités : $x_1 = \ldots\ldots$ $y_1 = \ldots\ldots$ $z_1 = \ldots\ldots$.

3°) On admet que $\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2^n} & 1-\frac{2}{2^n}+\frac{1}{4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{2}{2^n}-\frac{2}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel *n*.

Compléter les égalités : $x_n =$ .... , $y_n =$ ...., $z_n =$ .... pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Effectuer la démonstration sur une feuille à part.

III. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

Un internaute navigue sur un mini réseau web composé de trois pages A, B, C. Ces pages possèdent des liens hypertextes qui permettent de passer de certaines à d'autres par simple clic.
Voici la structure obtenue avec ces liens :

- la page A contient 3 liens : 2 menant à la page B et 1 à la page C ;
- la page B contient 4 liens : 2 vers la page A, 1 vers elle-même et 1 vers la page C ;
- la page C contient 2 liens : 1 vers la page A et 1 vers la page B.

1°) Représenter au brouillon la situation par un graphe probabiliste $\mathcal{G}$.
Écrire dans l'espace ci-contre la matrice de transition en colonnes T associée à $\mathcal{G}$.

2°) Quelle est la probabilité de passer de la page A à la page C en 2 clics ? ….. (une seule réponse sans égalité)

3°) L'internaute est sur la page A et effectue 10 clics.
Sur quelle page a-t-il le plus de chance d'arriver ? …..

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Une personne décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- si elle ne fume pas un jour donné, elle ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- si elle fume un jour donné, elle fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On note x_n la probabilité qu'elle ne fume pas le *n*-ième jour après la décision d'arrêter de fumer et y_n la probabilité qu'elle fume le *n*-ième jour après la décision d'arrêter de fumer. On suppose que $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

1°) On considère le graphe probabiliste $\mathcal{G}$ dont les états sont X : « La personne ne fume pas » et Y : « La personne fume ».
Écrire dans l'espace ci-contre la matrice de transition T en colonnes associée à $\mathcal{G}$.

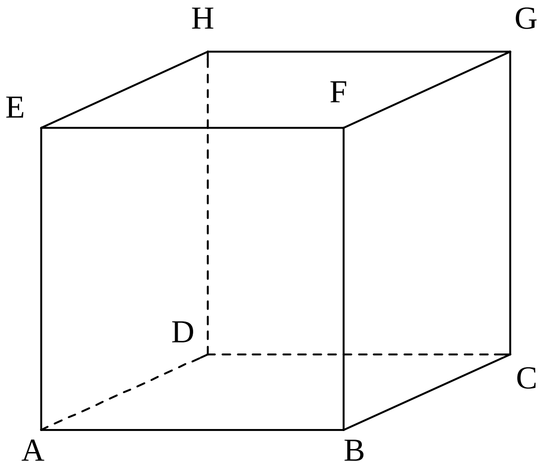
2°) À l'aide du résultat donné sur la feuille annexe, écrire T^n en une seule matrice pour *n* entier naturel quelconque.

3°) En déduire x_n et y_n en fonction de *n*.

$x_n =$ .... $y_n =$ ....

Feuille annexe
Interrogation écrite du jeudi 6 avril 2023

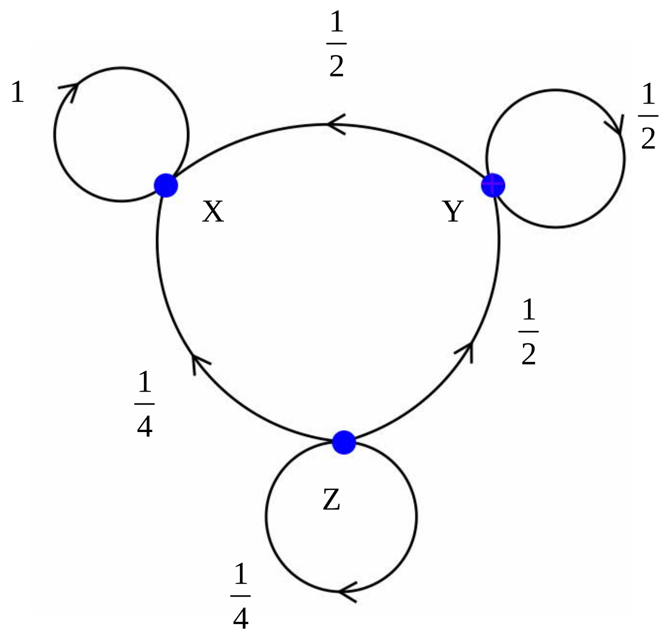
I.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 & 7 & 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 & 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 7 & 6 & 0 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 & 0 & 6 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 6 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 0 & 7 & 7 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 21 & 0 & 20 & 20 & 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 21 & 0 & 0 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 & 21 & 20 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 20 & 21 & 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 20 & 0 & 0 & 21 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 & 20 & 20 & 0 & 21 & 0 \\ 20 & 0 & 20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

II.



Bonus :

On reprend l'exercice **II**.

On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer Q^2. En déduire que Q est inversible et donner son inverse. Vérifier en utilisant la calculatrice.

Calculer QTQ. Retrouver ainsi T^n pour n entier naturel quelconque.

IV.

Rappel :

Soit a et b deux réels de somme non nulle.

- Pour tout entier naturel n, on a : $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}^n = \frac{1}{a+b}\left[\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + (1-a-b)^n \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}\right]$.

- Pour tout entier naturel n, on a : $\begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}^n = \frac{1}{a+b}\left[\begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix} + (1-a-b)^n \begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix}\right]$.

Pour les matrices de transition, on prendra les états dans l'ordre alphabétique.

Corrigé de l'interrogation écrite du 6-4-2023

I.

Un insecte se déplace sur un cube ABCDEFGH en parcourant à chaque étape l'une des arêtes choisie au hasard parmi celles à sa disposition.

1°) On note $\mathcal{G}$ le graphe probabiliste dont les sommets sont désignés par les lettres A, B, C, D, E, F, G, H en référence aux sommets du cube. On note également T la matrice de transition en colonnes associée à $\mathcal{G}$.

Exprimer T en fonction de la matrice M donnée sur la feuille annexe. $\mathrm{T}=\dfrac{1}{3}\mathrm{M}$ (une seule égalité)

Il n'est pas très utile de représenter le graphe $\mathcal{G}$.
Il s'agit néanmoins d'un graphe planaire.
La matrice T est bistochastique. Il y a donc une distribution (mesure) de probabilité invariante (distribution invariante ou distribution stationnaire) définie par la matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à $\dfrac{1}{8}$ (théorème sur les chaînes de Markov).
Cependant, il n'y a pas convergence vers cet état.

2°) On suppose que l'insecte part de A et effectue 3 étapes.
Calculer la probabilité des événements X : « L'itinéraire s'achève en un point voisin de A » et
Y : « L'itinéraire s'achève en un point diamétralement opposé à A sur une face, c'est-à-dire en C, F ou H ».

On a $\mathrm{T}=\dfrac{1}{3}\mathrm{M}$ donc $\mathrm{T}^3=\left(\dfrac{1}{3}\mathrm{M}\right)^3$ soit $\mathrm{T}^3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\mathrm{M}^3$, ce qui donne $\mathrm{T}^3=\dfrac{1}{27}\mathrm{M}^3$.

L'énoncé donne $\mathrm{M}^3=\begin{pmatrix}0&7&0&7&7&0&6&0\\7&0&7&0&0&7&0&6\\0&7&0&7&6&0&7&0\\7&0&7&0&0&6&0&7\\7&0&6&0&0&7&0&7\\0&7&0&6&7&0&7&0\\6&0&7&0&0&7&0&7\\0&6&0&7&7&0&7&0\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{T}^3=\dfrac{1}{27}\begin{pmatrix}0&7&0&7&7&0&6&0\\7&0&7&0&0&7&0&6\\0&7&0&7&6&0&7&0\\7&0&7&0&0&6&0&7\\7&0&6&0&0&7&0&7\\0&7&0&6&7&0&7&0\\6&0&7&0&0&7&0&7\\0&6&0&7&7&0&7&0\end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne représentant l'état probabiliste à l'étape n.

On a $\mathrm{U}_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = T^n U_0$

$$U_3 = T^3 U_0 = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

X est l’événement « L’itinéraire s’achève en B, en D ou en E ».

On a donc $P(X) = \frac{1}{27}(7+7+7) = \frac{3 \times 7}{3 \times 9} = \frac{7}{9}$.

$P(Y) = 0$

On peut retrouver ces deux résultats en écrivant tous les trajets possibles à partir du point A en 3 étapes :

A-B-C-G // A-B-C-B // A-B-C-D // A-B-F-G // A-B-F-B // A-B-F-E // A-B-A-B // A-B-A-E // A-B-A-D // A-D-C-G // A-D-C-D // A-D-C-G // A-D-H-E // A-D-H-G // A-D-H-D // A-D-A-E // A-D-A-B // A-D-A-D // A-E-F-B //A-E-F-G // A-E-F-E // A-E-A-B // A-E-A-D // A-E-A-E // A-E-H-G // A-E-H-D // A-E-H-E

Les trajets surlignés en jaune sont ceux qui correspondent à l’événement X.

3°) On suppose que l’insecte part de A et effectue 4 étapes.
Calculer la probabilité de l’événement Z : « L’itinéraire s’achève en A ».

$$U_4 = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

La probabilité de l'événement Z est $\frac{21}{81}=\frac{7}{27}$.

2°)	$\frac{7}{9}$	0

3°)	$\frac{7}{27}$

II.

On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées et on effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :
à l'étape 1, on lance les 2 pièces et on note les côtés qu'elles présentent,
à l'étape 2, on lance les pièces ayant présenté le côté pile à l'étape 1 (s'il en existe),
à l'étape 3, on lance les pièces ayant présenté le côté pile à l'étape 2 (s'il en existe),
et ainsi de suite.
On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.

1°) À chaque étape, on est soit dans l'état X : « Les deux pièces présentent le côté face », soit dans l'état Y : « L'une des deux pièces présente le côté pile et l'autre le côté face », soit dans l'état Z : « Les deux pièces présentent le côté pile ».
Sur la feuille annexe, on donne le graphe probabiliste $\mathcal{G}$ modélisant la situation.
Écrire dans l'espace ci-contre la matrice de transition T en colonnes associée à $\mathcal{G}$.

$$T=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

On peut vérifier car on donne T^n à la question 3°) : $T^n=\begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2^n} & 1-\frac{2}{2^n}+\frac{1}{4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{2}{2^n}-\frac{2}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$.

Il suffit de remplacer n par 1.

Il y a certaines arêtes et probabilités du graphe qui sont faciles à comprendre :
- si on est dans l'état X, on reste dans l'état X ;
- le passage de l'état Y à l'état Z n'est pas possible.

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note x_n, y_n, z_n les probabilités d'être respectivement dans les états X, Y, Z à l'étape n.

Compléter les égalités : $x_1=\frac{1}{4}$ $\quad y_1=\frac{1}{2}$ $\quad z_1=\frac{1}{4}$.

x_1 est la probabilité d'être dans l'état X à l'étape 1. Il s'agit donc de la probabilité d'obtenir face-face. La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{4}$. On peut l'obtenir en effectuant le produit $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ (par indépendance des lancers des deux pièces).

y_1 est la probabilité d'être dans l'état Y à l'étape 1. Il s'agit donc de la probabilité d'obtenir pile-face ou face-pile. La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{2}$.

z_1 est la probabilité d'être dans l'état Z à l'étape 1. Il s'agit donc de la probabilité d'obtenir pile-pile. La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{4}$.

3°) On admet que $\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2^n} & 1-\frac{2}{2^n}+\frac{1}{4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{2}{2^n}-\frac{2}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel *n*.

Compléter les égalités : $x_n = 1-\frac{2}{2^n}+\frac{1}{4^n}$, $y_n = \frac{2}{2^n}-\frac{2}{4^n}$, $z_n = \frac{1}{4^n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Effectuer la démonstration sur une feuille à part.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ (matrice colonne qui donne l'état probabiliste à l'étape *n*).

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{U}_n = \mathrm{T}^{n-1}\mathrm{U}_1$ soit $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \mathrm{T}^{n-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

D'après l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2^n} & 1-\frac{2}{2^n}+\frac{1}{4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{2}{2^n}-\frac{2}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{T}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2^{n-1}} & 1-\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{1}{4^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2}{4^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^{n-1}} \end{pmatrix}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{2^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{2^{n-1}} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{4^n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n}$$

$$= 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{4^n}$$ (autre forme possible : $x_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{4^n}$ ou encore $x_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{2n}}$)

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad y_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{2^{n-1}} - \frac{2}{4^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{4^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{4^n}$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{2}{4^n}$$

$$= \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad z_n = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{4^n}$$

On vérifie immédiatement avec les expressions trouvées que $x_n + y_n + z_n = 1$.

On a $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

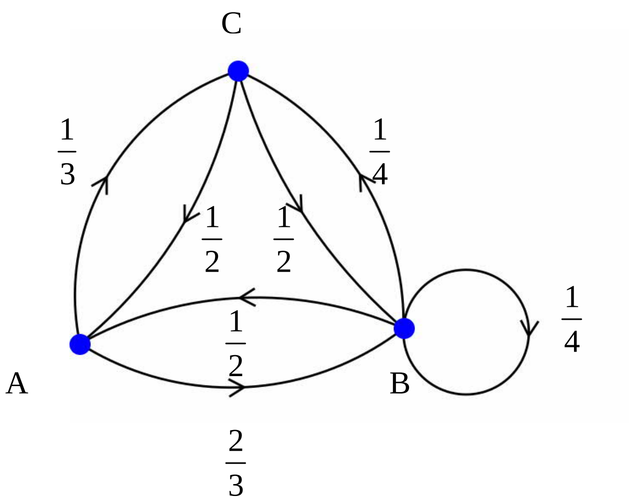
On peut écrire $\mathrm{U}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La chaîne de Markov converge donc vers l'état limite $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

III.

Un internaute navigue sur un mini réseau web composé de trois pages. Ces pages possèdent des liens hypertextes qui permettent de passer de certaines à d'autres par simple clic.
Voici la structure obtenue avec ces liens :

- la page A contient 3 liens : 2 menant à la page B et 1 à la page C ;
- la page B contient 4 liens : 2 vers la page A, 1 vers elle-même et 1 vers la page C ;
- la page C contient 2 liens : 1 vers la page A et 1 vers la page B.

1°) Représenter au brouillon la situation par un graphe probabiliste $\boldsymbol{G}$.
Écrire dans l'espace ci-contre la matrice de transition en colonnes T associée à $\boldsymbol{G}$.



$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

2°) Quelle est la probabilité de passer de la page A à la page C en 2 clics ? $\frac{1}{6}$ (une seule réponse sans égalité)

On calcule la matrice T^2.

$$T^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{25}{48} & \frac{11}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{48} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$$

On regarde le coefficient situé sur la 3$^{\text{e}}$ ligne et dans la 1$^{\text{ère}}$ colonne.

3°) L'internaute est sur la page A et effectue 10 clics.
Sur quelle page a-t-il le plus de chance d'arriver ? B

On calcule la matrice T^{10}.

$$T^{10}=\begin{pmatrix} \frac{171}{512} & \frac{341}{1024} & \frac{341}{1024} \\ \frac{341}{768} & \frac{1398785}{3145728} & \frac{699391}{1572864} \\ \frac{341}{1531} & \frac{699391}{3145728} & \frac{349697}{1572864} \end{pmatrix}$$

$$T^{10}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{171}{512} & \frac{341}{1024} & \frac{341}{1024} \\ \frac{341}{768} & \frac{1398785}{3145728} & \frac{699391}{1572864} \\ \frac{341}{1531} & \frac{699391}{3145728} & \frac{349697}{1572864} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{171}{512}\\ \frac{341}{768}\\ \frac{341}{1531}\end{pmatrix}$$

$\frac{171}{512}=0,33398437...$

$\frac{341}{768}=0,4440104166...$

$\frac{341}{1531}=0,2227302416...$

Le plus grand des 3 coefficients de la matrice colonne est $\frac{341}{768}$.

L'internaute a donc le plus de chance d'arriver sur la page B.

IV.

Une personne décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

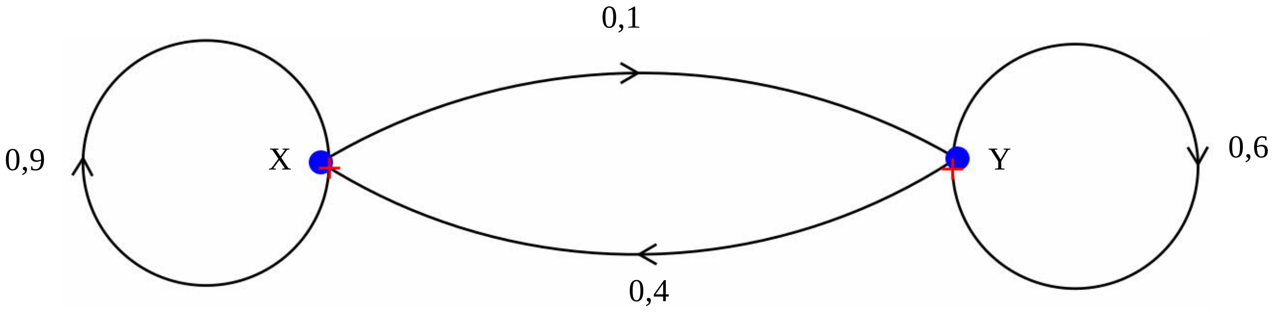
- si elle ne fume pas un jour donné, elle ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- si elle fume un jour donné, elle fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On note x_n la probabilité qu'elle ne fume pas le n-ième jour après la décision d'arrêter de fumer et y_n la probabilité qu'elle fume le n-ième jour après la décision d'arrêter de fumer. On suppose que $x_0=0$ et $y_0=1$.

1°) On considère le graphe probabiliste $\mathcal{G}$ dont les états sont X : « La personne ne fume pas » et Y : « La personne fume ».

Écrire dans l'espace ci-contre la matrice de transition T en colonnes associée à $\mathcal{G}$. $T=\begin{pmatrix}0,9 & 0,4\\ 0,1 & 0,6\end{pmatrix}$

Le graphe ***G*** est très facile à représenter.



2°) À l'aide du résultat donné sur la feuille annexe, écrire T^n en une seule matrice pour *n* entier naturel quelconque.

On écrit $\mathrm{T}=\begin{pmatrix}1-0,1 & 0,4\\ 0,1 & 1-0,4\end{pmatrix}$.

On applique la formule suivante pour $a=0,1$ et $b=0,4$:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{pmatrix}1-a & b\\ a & 1-b\end{pmatrix}^n=\frac{1}{a+b}\left[\begin{pmatrix}b & b\\ a & a\end{pmatrix}+(1-a-b)^n\begin{pmatrix}a & -b\\ -a & b\end{pmatrix}\right].$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{T}^n=\frac{1}{0,1+0,4}\left[\begin{pmatrix}0,4 & 0,4\\ 0,1 & 0,1\end{pmatrix}+(1-0,1-0,4)^n\begin{pmatrix}0,1 & -0,4\\ -0,1 & 0,4\end{pmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{0,5}\left[\begin{pmatrix}0,4 & 0,4\\ 0,1 & 0,1\end{pmatrix}+(1-0,5)^n\begin{pmatrix}0,1 & -0,4\\ -0,1 & 0,4\end{pmatrix}\right]$$

$$=2\left[\begin{pmatrix}0,4 & 0,4\\ 0,1 & 0,1\end{pmatrix}+(0,5)^n\begin{pmatrix}0,1 & -0,4\\ -0,1 & 0,4\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}0,8+0,2\times(0,5)^n & 0,8-0,8\times(0,5)^n\\ 0,2-0,2\times(0,5)^n & 0,2+0,8\times(0,5)^n\end{pmatrix}$$

3°) En déduire x_n et y_n en fonction de *n*.

$$x_n=0,8-0,8\times(0,5)^n \qquad y_n=0,2+0,8\times(0,5)^n$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\mathrm{T}^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,8+0,2\times(0,5)^n & 0,8-0,8\times(0,5)^n\\ 0,2-0,2\times(0,5)^n & 0,2+0,8\times(0,5)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,8-0,8\times(0,5)^n\\ 0,2+0,8\times(0,5)^n\end{pmatrix}$$

On vérifie immédiatement avec les expressions trouvées que $x_n+y_n=1$.

Bonus :

On reprend l'exercice **II**.

On pose $Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Calculer Q^2. En déduire que Q est inversible et donner son inverse. Vérifier en utilisant la calculatrice.

Calculer QTQ. Retrouver ainsi T^n pour *n* entier naturel quelconque.

$$Q^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On peut donc écrire $Q^2=I_3$.

On en déduit que Q est inversible et que son inverse est égale à elle-même : $Q^{-1}=Q$.

$$QT=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$QTQ=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

Comme $Q^{-1}=Q$, on peut écrire $QTQ=Q^{-1}TQ$, de sorte qu'il est possible d'appliquer une propriété du cours.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad (QTQ)^n=\left(Q^{-1}TQ\right)^n=\left(Q^{-1}TQ\right)^n=Q^{-1}T^nQ=QT^nQ$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad QT^nQ=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n}\end{pmatrix}\quad \text{(puissances d'une matrice diagonale)}$$

En multipliant les deux membres par Q, on obtient, $T^n=Q\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n}\end{pmatrix}Q$.

Par calcul, on retrouve finalement $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-\dfrac{1}{2^n} & 1-\dfrac{2}{2^n}+\dfrac{1}{4^n} \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} & \dfrac{2}{2^n}-\dfrac{2}{4^n} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{4^n} \end{pmatrix}$.