T
exp

Interrogation écrite du vendredi 20 mai 2022 (30 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………..……………………………

Note : ….. / 20

I. (3 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x - 1$ si $x < 0$ et $f(x) = 1 - 2\sqrt{\ln(x+1)}$ si $x \geqslant 0$.

Étudier la continuité de *f* en 0.

………………………………………………………..………………………………………………………

………………………………………………………..………………………………………………………

………………………………………………………..………………………………………………………

………………………………………………………..………………………………………………………

………………………………………………………..………………………………………………………

………………………………………………………..………………………………………………………

II. (6 points : 1 point + 2 points + 2 points)

On considère la fonction F : $x \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{\cos t}}$ (on ne cherchera pas à exprimer $\mathrm{F}(x)$ en fonction de *x*).

Calculer $\mathrm{F}'(x)$ sans justifier.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Compléter les égalités : $\mathrm{F}'(0) = \ldots\ldots.$; $\mathrm{F}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots\ldots.$

La fonction F est-elle convexe ou concave sur l'intervalle $[0\,;\pi]$? Justifier.

………………………………………………………..………………………………………………………

………………………………………………………..………………………………………………………

………………………………………………………..………………………………………………………

III. (4 points)

Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

Compléter les égalités suivantes : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\displaystyle\int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$.

1°) Calculer I.

2°) Calculer $I+J$. On rappelle que pour tout réel x on a $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

3°) En déduire la valeur de J.

……

……

……

……

……

……

V. (3 points)

Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

……

……

……

……

Corrigé de l'interrogation écrite du 20-5-2022

I.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\mathrm{e}^x-1$ si $x<0$ et $f(x)=1-2\sqrt{\ln(x+1)}$ si $x\geqslant 0$.
Étudier la continuité de f en 0.

On étudie les limites de f en 0 à gauche et à droite.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x\mathrm{e}^x-1\right)=-1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1-2\sqrt{\ln(x+1)}\right)=1-2\ln 1=1$$

On constate que ces deux limites sont différentes.

La fonction f n'admet donc pas de limite en 0 et par conséquent, n'est pas continue en 0.

Commentaire :

On a $f(0)=1-2\sqrt{\ln(0+1)}=1-2\sqrt{\ln 1}=1$.
Par ailleurs, on a démontré que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$.
On peut donc écrire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.
Par conséquent, f est continue à droite en 0 mais n'est pas continue à gauche.

II.

On considère la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{\cos t}}$ (on ne cherchera pas à exprimer $\mathrm{F}(x)$ en fonction de x).

Calculer $\mathrm{F}'(x)$ sans justifier.

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \mathrm{F}'(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\cos x}}$$

Considérons la fonction $u : t\mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\cos t}}$.

La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, celle du dénominateur ne s'annulant pas).

De plus, $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x} u(t)\,\mathrm{d}t$.

D'après le théorème du cours, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{F}'(x)=u(x)$ soit $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{F}'(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\cos x}}$.

On peut dire que F est la primitive de u qui s'annule en – 1.

Compléter les égalités : $\text{F}'(0)=\dfrac{1}{1+\text{e}}$; $\text{F}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

La fonction F est-elle convexe ou concave sur l'intervalle $[0\,;\pi]$? Justifier.

Pour savoir si F est concave ou convexe sur l'intervalle $[0\,;\pi]$, on calcule $\text{F}''(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \text{F}''(x)=-\frac{(-\sin x)\text{e}^{\cos x}}{\left(1+\text{e}^{\cos x}\right)^2}$$

$$=\frac{\sin x\times\text{e}^{\cos x}}{\left(1+\text{e}^{\cos x}\right)^2}$$

On observe que le signe de $\text{F}''(x)$ dépend uniquement de celui de $\sin x$ (les autres facteurs du quotient sont tous strictement positifs de manière évidente).

$\forall x\in[0\,;\pi]\quad \sin x\geqslant 0$ donc $\forall x\in[0\,;\pi]\quad \text{F}''(x)\geqslant 0$.

On en déduit que F est convexe ou concave sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

III.

Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

Compléter les égalités suivantes : $\displaystyle\int_1^{\text{e}}\frac{(\ln x)^n}{x}\,\text{d}x=\frac{1}{n+1}$; $\displaystyle\int_1^{\frac{1}{\text{e}}}\frac{(\ln x)^n}{x}\,\text{d}x=\frac{(-1)^n}{n+1}$.

On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

Une primitive de la fonction $f:x\mapsto\dfrac{(\ln x)^n}{x}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est la fonction $\text{F}:x\mapsto\dfrac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$.

On peut en effet écrire $f(x)=\dfrac{1}{x}\times(\ln x)^n$.

$$\int_1^{e} \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}\right]_1^{e}$$

$$= \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - 0$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$$\int_1^{\frac{1}{e}} \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}\right]_1^{\frac{1}{e}}$$

$$= \frac{\left(\ln \frac{1}{e}\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{(\ln 1)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

IV.

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx$.

1°) Calculer *I*.

2°) Calculer $I + J$. On rappelle que pour tout réel x on a $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

3°) En déduire la valeur de *J*.

1°)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\ \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{\ln\left| 1+2\sin x \right|}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\ln\left| 1+2\sin\frac{\pi}{2} \right|}{2} - \frac{\ln\left| 1+2\sin 0 \right|}{2}$$

$$= \frac{\ln\left| 1+2\times 1 \right|}{2} - \frac{\ln\left| 1+2\times 0 \right|}{2}$$

$$= \frac{\ln 3}{2} - \frac{\ln 1}{2}$$

$$= \frac{\ln 3}{2} - \frac{0}{2}$$

$$= \frac{\ln 3}{2}$$

On vérifie cette valeur grâce à la calculatrice.

2°)

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{1+2\sin x}+\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\sin 2x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+2\sin x\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x(1+2\sin x)}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0$$

$$=1-0$$

$$=1$$

3°)

Dans les questions précédentes, on a démontré que $I+J=1$ et que $I=\frac{\ln 3}{2}$.

On peut donc écrire que $J=1-I$ soit $J=1-\frac{\ln 3}{2}$.

On vérifie cette valeur grâce à la calculatrice.

V.

Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I=\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

On utilise la formule d'intégration par parties.

On considère la fonction u définie par $u(x)=x$ et une fonction v telle que $v'(x)=\mathrm{e}^{-x}$.
On peut choisir la fonction v définie par $v(x)=-\mathrm{e}^{-x}$.

On a alors :
$u(x)=x$; $v'(x)=\mathrm{e}^{-x}$
$u'(x)=1$; $v(x)=-\mathrm{e}^{-x}$.

$$I=\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\ x\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\ \right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0} 1\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\ -x\mathrm{e}^{-x}\ \right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}-\left[\ \mathrm{e}^{-x}\ \right]_{-1}^{0}$$

$$=-\mathrm{e}-(1-\mathrm{e})$$

$$=-1$$

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

On observe que le signe de I est négatif, ce qui était prévisible a priori.