T
exp

Interrogation écrite du jeudi 2 février 2023 (30 minutes)

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (2 points)

Dans un jeu, on dispose d'un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Le joueur le lance cinq fois dans des conditions identiques indépendantes. Il note chaque fois le numéro de la face supérieure. Il est déclaré gagnant à l'issue des cinq lancers s'il obtient au moins une fois le même numéro pour deux lancers consécutifs et est déclaré perdant dans le cas contraire.
Compléter les pointillés afin que la fonction Python d'en-tête `def jeu():` donnée dans le cadre ci-dessous permette de simuler une partie de ce jeu.
On suppose que la fonction `randint` de la bibliothèque `random` a été préalablement importée.

```
def jeu():
    L=[randint(1,6) for i in range(5)]
    v=0
    for k in range(4):
        if L[k]==L[k+1]:
           v=1
    if ……….. :
       print("gagné")
    else:
       print("perdu")
```

Question bonus (1 point) : Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?

II. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point + 2 points + 1 point + 1 point)

1°) Déterminer le nombre d'entiers relatifs x tels que $x \equiv 2 \pmod{3}$ et $-1000 \leqslant x \leqslant 1000$. ……………

2°) La fonction Python d'en-tête `def den_cong2(a,b):` donnée dans le cadre ci-dessous prend pour arguments deux entiers relatifs a et b tels que $a \leqslant b$ et a pour but de renvoyer le nombre d'entiers relatifs x tels que $x \equiv 2 \pmod{3}$ et $a \leqslant x \leqslant b$.

```
def den_cong2(a,b):
    c=0
    for k in range(…………..):
        if …………..:
           c=……..
    return ….
```

Programmer cette fonction et retrouver le résultat de la question 1°).

III. (4 points)

Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{2023} par 11 ? On attend une démarche utilisant les congruences.

Écrire la réponse sur les pointillés ci-contre. .....

Détailler la démarche sur les pointillés ci-dessous en rédigeant avec soin. Vérifier en utilisant la calculatrice Python.

....

....

....

....

IV. (7 points : 1°) 4 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère l'application *F* de *P* dans lui-même qui à tout point M de *P*, d'affixe *z*, associe le point M' d'affixe $z' = \left(|\,z\,| - 2\right)\overline{z}$.

On note $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ les cercles de centre O et de rayons respectifs 1, 2, 3.

On note également U, V, S, T les points de *P* d'affixes respectives 1, i, – 1, – i.

1°) Quelles sont les affixes des points U', V', S', T', images respectives des points U, V, S, T par *F* ?

U'	
V'	
S'	
T'	

Que peut-on dire des points V et T pour *F* ? Répondre par une phrase correctement rédigée.

....

2°) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}_1$.

Cocher la proposition exacte.

☐ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OU).

☐ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OV).

☐ M' est le symétrique de M par rapport au point O.

3°) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}_3$.

Cocher la proposition exacte.

☐ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OU).

☐ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OV).

☐ M' est le symétrique de M par rapport au point O.

4°) Que peut-on dire de l'image d'un point quelconque de $\mathcal{C}_2$? $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{C}_2 \quad F(\mathrm{M}) = ...$

Corrigé de l’interrogation écrite du 2-2-2023

I.

Dans un jeu, on dispose d’un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Le joueur le lance cinq fois dans des conditions identiques indépendantes. Il note chaque fois le numéro de la face supérieure. Il est déclaré gagnant à l’issue des cinq lancers s’il obtient au moins une fois le même numéro pour deux lancers consécutifs et est déclaré perdant dans le cas contraire.
Compléter les pointillés afin que la fonction Python d’en-tête `def jeu():` donnée dans le cadre ci-dessous permette de simuler une partie de ce jeu.
On suppose que la fonction `randint` de la bibliothèque `random` a été préalablement importée.

```
def jeu():
    L=[randint(1,6) for i in range(5)]
    v=0
    for k in range(4):
        if L[k]==L[k+1]:
            v=1
    if v==1:
        print("gagné")
    else:
        print("perdu")
```

Le programme marche aussi avec la condition `v>=1` mais c’est beaucoup moins logique.

`c` est un compteur.

`L` stocke les résultats des différents lancers.

Question bonus : Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu ?

On raisonne avec l’événement contraire en faisant appel aux techniques de dénombrement (méthode des cases).

Il y a 6^5 résultats possibles.

Pour déterminer le nombre résultats possibles pour l’événement « Le joueur perd », on remplit les cases suivantes de gauche à droite :

1er lancer	2e lancer	3e lancer	4e lancer	5e lancer
6	5	5	5	5

$P\left(\text{« Le joueur gagne »}\right)=1-\dfrac{6\times5^4}{6^5}$

$$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$=\frac{671}{1296}$$

$$=0,517746913...$$

II.

1°) Déterminer le nombre d'entiers relatifs x tels que $x\equiv 2 \pmod{3}$ et $-1000\leqslant x\leqslant 1000$. 667

On sait que l'écriture générique d'un entier relatif congru à 2 modulo 3 est $2+3k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

On cherche donc les entiers relatifs k tels que $-1000\leqslant 2+3k\leqslant 1000 \quad (1)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow -1002\leqslant 3k\leqslant 998\\ &\Leftrightarrow -\frac{1002}{3}\leqslant k\leqslant\frac{998}{3}\\ &\Leftrightarrow -334\leqslant k\leqslant\frac{998}{3}\\ &\Leftrightarrow -334\leqslant k\leqslant 332 \quad \left(\frac{998}{3}=332,6\underline{6}...\right)\end{aligned}$$

D'après cette dernière inégalité, les entiers k vérifiant (1) sont les entiers relatifs de – 334 à 332 compris.
Le nombre de ces entiers est donc égal à $332-(-334)+1=667$.

2°) La fonction Python d'en-tête `def den_cong2(a,b):` donnée dans le cadre ci-dessous prend pour arguments deux entiers relatifs a et b tels que $a\leqslant b$ et a pour but de renvoyer le nombre d'entiers relatifs x tels que $x\equiv 2 \pmod{3}$ et $a\leqslant x\leqslant b$.

```
def den_cong2(a,b):
    c=0
    for k in range(a,b+1):
        if k%2==3:
            c=c+1
    return c
```

Programmer cette fonction et retrouver le résultat de la question 1°).

On vérifie le résultat du peut aussi utiliser un programme Python.

III.

Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{2023} par 11 ? On attend une démarche utilisant les congruences.
Écrire la réponse sur les pointillés ci-contre. 8

Détailler la démarche sur les pointillés ci-dessous en rédigeant avec soin. Vérifier en utilisant la calculatrice Python.

On a $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ [résultat très facile à obtenir].

En élevant au carré les deux membres de cette relation de congruence, on obtient $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

On décompose ensuite 2023 : $2023 = 2020 + 3$.

On a $\left(2^{10}\right)^{202} \equiv 1 \pmod{11}$ soit $2^{2020} \equiv 1 \pmod{11}$ [α].

Par ailleurs, $2^3 \equiv 8 \pmod{11}$ [β].

Les relations de congruences [α] et [β] entraînent par produit membre à membre la relation suivante :
$2^{2023} \equiv 8 \pmod{11}$.

Comme $0 \leqslant 8 < 11$, on peut affirmer que le reste de la division euclidienne de 2^{2023} par 11 est égal à 8.

On vérifie en utilisant la calculatrice Python : `(2**2023) % 11`.

IV.

Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère l'application *F* de *P* dans lui-même qui à tout point M de *P*, d'affixe *z*, associe le point M' d'affixe $z' = \left(|\,z\,| - 2\right)\overline{z}$.
On note $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ les cercles de centre O et de rayons respectifs 1, 2, 3.
On note également U, V, S, T les points de *P* d'affixes respectives 1, i, – 1, – i.

1°) Quelles sont les affixes des points U', V', S', T', images respectives des points U, V, S, T par *F* ?

U'	– 1
V'	i
S'	1
T'	– i

Que peut-on dire des points V et T pour *F* ? Répondre par une phrase correctement rédigée.

Les points V et T sont invariants par *F* (car ils sont tous les deux confondus avec leur image par *F*).

2°) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}_1$.
Cocher la proposition exacte.

☐ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OU).

☒ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OV).

☐ M' est le symétrique de M par rapport au point O.

$M \in \mathcal{C}_1$ donc $OM = 1$ d'où $|z| = 1$.

Or $z' = (|z| - 2)\overline{z}$ donc $z' = (1-2)\overline{z}$ soit $z' = -\overline{z}$ d'où le résultat.

On peut éventuellement s'aider d'un graphique (et repasser à l'écriture algébrique de *z*).

3°) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}_3$.

Cocher la proposition exacte.

☒ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OU).

☐ M' est le symétrique de M par rapport à la droite (OV).

☐ M' est le symétrique de M par rapport au point O.

$M \in \mathcal{C}_3$ donc $OM = 3$ d'où $|z| = 3$.

Or $z' = (|z| - 2)\overline{z}$ donc $z' = (3-2)\overline{z}$ soit $z' = \overline{z}$ d'où le résultat.

4°) Que peut-on dire de l'image d'un point quelconque de $\mathcal{C}_2$?

$\forall M \in \mathcal{C}_2 \quad F(M) = O$

$M \in \mathcal{C}_2$ donc $OM = 2$ d'où $|z| = 2$.

Or $z' = (|z| - 2)\overline{z}$ donc $z' = (2-2)\overline{z}$ soit $z' = 0$ d'où le résultat.