T exp

Interrogation écrite du jeudi 26 janvier 2023 (30 minutes)

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (10 points)

Partie A (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points + 2 points)

On pose $E=\left\{x\in\mathbb{Z}\ /\ x\equiv 2\ (\mathrm{mod.}\ 3)\right\}$.

1°) Compléter, sans justifier, en utilisant le symbole $\in$ ou $\notin$: 2023 ….. E – 2023 ….. E

2°) On note E_1 et E_2 les sous-ensembles de E ainsi définis :

$$E_1=\left\{x\in E\ /\ -10\leqslant x\leqslant 10\right\}\ ;\ E_2=\left\{x\in E\ /\ -100\leqslant x\leqslant 100\right\}.$$

Écrire E_1 en extension sur la ligne ci-contre : ………………………………………..……………………..

Compléter l'égalité : $\mathrm{card}\ E_2=$...... Indication : On pourra utiliser l'écriture générique des éléments de E.

Partie B (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point + 1 point)

On pose $F=\left\{x\in\mathbb{Z}\ /\ x\equiv 3\ (\mathrm{mod.}\ 6)\right\}$ et $G=\left\{x\in\mathbb{Z}\ /\ x\equiv -3\ (\mathrm{mod.}\ 6)\right\}$.

1°) Comparer les ensembles F et G. On donnera un argument qui permet de justifier.

……….……

2°) Compléter la colonne de droite du tableau ci-dessous par les lettres V (vrai) ou F (faux).

Dans les implications et l'équivalence, x désigne un entier relatif quelconque.

$x\in F\ \Rightarrow x$ est un multiple de 3	
$x\in F\ \Rightarrow x$ est impair	
$x\in F\ \Leftrightarrow\ -x\in F$	

II. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

1°) Compléter la deuxième ligne du tableau de congruences ci-dessous où x est un entier relatif.
On écrira chaque fois le plus petit entier naturel.

Si $x\equiv\ldots$ (mod. 6)	0	1	2	3	4	5
Alors $x^2\equiv\ldots$ (mod. 6)	…	…	…	…	…	…

2°) On note E l'ensemble des entiers relatifs x tels que $x^2 \equiv 4 \pmod{6}$.
À l'aide du tableau, caractériser E de manière explicite en complétant l'équivalence ci-dessous pour $x \in \mathbb{Z}$ par des relations de congruences de la forme $x \equiv ...... \pmod{6}$:

$$x \in E \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3°) À l'aide d'un tableau de congruences, démontrer que pour tout entier relatif x, on a $x^3 \equiv x \pmod{6}$.

………..

………..

III. (2 points)

Soit z un nombre complexe quelconque de module 1.
Démontrer que pour tout entier relatif n, on a $\left| z^{n+1} - z^n \right| = \left| z - 1 \right|$.

………..

………..

………..

………..

………..

IV. (2 points)

Soit z un nombre complexe quelconque.
Écrire l'expression $\left| \dfrac{\overline{z}}{\mathrm{i}} - \mathrm{i} \right|$ sous la forme $\left| z - ...... \right|$ ou $\left| z + ... \right|$, les pointillés devant être remplacés par le nombre complexe qui convient.
Justifier sur la ligne en dessous.

$$\left| \frac{\overline{z}}{\mathrm{i}} - \mathrm{i} \right| = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 26-1-2023

I.

Partie A

On pose $E=\{x\in\mathbb{Z}\ /\ x\equiv 2\ (\text{mod}.\ 3)\}$.

1°) Compléter, sans justifier, en utilisant le symbole $\in$ ou $\notin$: $2023\notin E$ $-2023\in E$

2°) On note E_1 et E_2 les sous-ensembles de E ainsi définis :

$E_1=\{x\in E\ /\ -10\leqslant x\leqslant 10\}$; $E_2=\{x\in E\ /\ -100\leqslant x\leqslant 100\}$.

Écrire E_1 en extension sur la ligne ci-contre : $E_1=\{-10\,;-7\,;-4\,;-1\,;2\,;5\,;8\}$.

Compléter l'égalité : $\text{card}\ E_2=67$ Indication : On pourra utiliser l'écriture générique des éléments de E.

On sait que l'écriture générique d'un élément de E est $2+3k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
On cherche donc les entiers relatifs k tels que $-100\leqslant 2+3k\leqslant 100$ (1).

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow -102\leqslant 3k\leqslant 98\\ &\Leftrightarrow -\frac{102}{3}\leqslant k\leqslant \frac{98}{3}\\ &\Leftrightarrow -34\leqslant k\leqslant \frac{98}{3}\\ &\Leftrightarrow -34\leqslant k\leqslant 32\ \ \left(\text{car } \frac{98}{3}=32{,}6\underline{6}...\right)\end{aligned}$$

Les valeurs de k cherchées sont donc les entiers relatifs de -34 à 32 compris.
Le nombre de ces entiers est donc égal à $32-(-34)+1=67$.

On peut aussi utiliser un programme Python.

Partie B

On pose $F=\{x\in\mathbb{Z}\ /\ x\equiv 3\ (\text{mod}.\ 6)\}$ et $G=\{x\in\mathbb{Z}\ /\ x\equiv -3\ (\text{mod}.\ 6)\}$.

1°) Comparer les ensembles F et G. On donnera un argument qui permet de justifier.

$F=G$ car $3\equiv -3$ (mod. 6).

C'est le seul argument valable.
On ne peut raisonner à partir d'un ou de plusieurs exemples.

2°) Compléter la colonne de droite du tableau ci-dessous par les lettres V (vrai) ou F (faux).

Dans les implications et l'équivalence, x désigne un entier relatif quelconque.

$x \in F \Rightarrow x$ est un multiple de 3	V
$x \in F \Rightarrow x$ est impair	V
$x \in F \Leftrightarrow -x \in F$	V

● On s'intéresse à l'implication :

$$\boxed{x \in F \Rightarrow x \text{ est un multiple de } 3}$$

Soit x un élément quelconque de F.
Il existe donc un entier relatif k tel que $x = 3 + 6k$.
On peut alors écrire $x = 3(1+2k) \quad (1)$.
Comme k est un entier relatif, $1+2k$ est aussi un entier relatif.
D'après l'égalité (1), on peut affirmer que x est un multiple de 3.

● On s'intéresse à l'implication :

$$\boxed{x \in F \Rightarrow x \text{ est impair}}$$

On reprend l'égalité (1).
3 est un nombre impair et $1+2k$ est un nombre impair.
Or le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.
On en déduit que x est un nombre impair.

● On s'intéresse l'équivalence :

$$\boxed{x \in F \Leftrightarrow -x \in F}$$

On utilise l'équivalence fondamentale pour a et b entiers relatifs et n entier naturel supérieur ou égal à 2 :

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow -a \equiv -b \pmod{n}.$$

On applique :

$$x \equiv 3 \pmod{6} \Leftrightarrow -x \equiv -3 \pmod{6}$$

On utilise ensuite l'égalité d'ensembles établie à la question précédente $F = G$.

II.

1°) Compléter la deuxième ligne du tableau de congruences ci-dessous où x est un entier relatif.
On écrira chaque fois le plus petit entier naturel.

Si $x \equiv \ldots \pmod{6}$	0	1	2	3	4	5
Alors $x^2 \equiv \ldots \pmod{6}$	0	1	4	3	4	1

2°) On note E l'ensemble des entiers relatifs x tels que $x^2 \equiv 4 \pmod{6}$.
À l'aide du tableau, caractériser E de manière explicite en complétant l'équivalence ci-dessous pour $x \in \mathbb{Z}$ par des relations de congruences de la forme $x \equiv \ldots\ldots \pmod{6}$:

$$x \in E \Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod{6} \boxed{\text{ou}} x \equiv 4 \pmod{6}$$

Tout nombre entier relatif est congru soit à 0, soit à 1, soit à 2, soit à 3, soit à 4, soit à 5 modulo 6.

Le connecteur logique qui convient est bien le « ou » et non le « et ».

3°) À l'aide d'un tableau de congruences, démontrer que pour tout entier relatif x, on a $x^3 \equiv x \pmod{6}$.

Si $x \equiv \ldots \pmod{6}$	0	1	2	3	4	5
Alors $x^3 \equiv \ldots \pmod{6}$	0	1	2	3	4	5

Tout nombre entier relatif est congru soit à 0, soit à 1, soit à 2, soit à 3, soit à 4, soit à 5 modulo 6.
D'après le tableau de congruences, on a donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}}$ $x^3 \equiv x \pmod{6}$.

III.

Soit z un nombre complexe quelconque de module 1.
Démontrer que pour tout entier relatif n, on a $\left| z^{n+1} - z^n \right| = \left| z - 1 \right|$.

On ne passe surtout pas par la forme algébrique de z.

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \left| z^{n+1} - z^n \right| = \left| z^n (z-1) \right|$$

$$= \left| z^n \right| \times \left| z - 1 \right|$$

$$= \left| z \right|^n \times \left| z - 1 \right|$$

$$= 1^n \times \left| z - 1 \right|$$

$$= \left| z - 1 \right|$$

IV.

Soit z un nombre complexe quelconque.

Écrire l'expression $\left|\dfrac{\overline{z}}{\mathrm{i}}-\mathrm{i}\right|$ sous la forme $|\,z-......\,|$ ou $|\,z+......\,|$, les pointillés devant être remplacés par le nombre complexe qui convient.

Justifier sur la ligne en dessous.

$$\left|\frac{\overline{z}}{\mathrm{i}}-\mathrm{i}\right|=|\,z+1\,|$$

On ne repasse surtout pas par la forme algébrique de z.

$\left|\dfrac{\overline{z}}{\mathrm{i}}-\mathrm{i}\right|=|-\mathrm{i}\overline{z}-\mathrm{i}\,|$

$=\left|-\mathrm{i}\left(\overline{z}+1\right)\right|$

$=|-\mathrm{i}\,|\times|\,\overline{z}+1\,|$ (propriété : « Le module d'un produit est égal au produit des modules »)

$=1\times|\,\overline{z}+1\,|$

$=|\,\overline{z}+1\,|$

$=|\,\overline{z+1}\,|$

$=|\,z+1\,|$ (propriété : « Le module d'un conjugué est égal au module du nombre »)