T exp

Interrogation écrite du jeudi 19 janvier 2023 (30 minutes)

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point + 1 point)

1°) La fonction Python d'en-tête `def select_pairs(L):` donnée dans l'encadré ci-dessous prend pour argument une liste L d'entiers relatifs et a pour but de renvoyer la liste des éléments de L qui sont pairs.
Par exemple, pour la liste `[-3,2,0,1,4]`, la fonction doit renvoyer la liste `[2,0,4]`.
Compléter les pointillés.

```
def select_pairs(L):
    M=[x for x in L if ………………….]
    return ….
```

2°) Compléter la fonction Python d'en-tête `def select_pairs_bis(L):` dans l'encadré ci-dessous afin qu'elle fasse la même chose que la fonction de la question précédente.

```
def select_pairs_bis(L):
    M=[]
    for x in L:
        if …………..:
           M.append(…)
    return ….
```

II. (6 points : 1°) 2 points + 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(z)=\left(|z|-2\right)\overline{z}$ pour tout nombre complexe *z*.

1°) Calculer les images de -3i et $\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}$ par *f*. Écrire les calculs en colonnes.

………

………

………

………

………

2°) La fonction Python d'en-tête `def image(z):` donnée dans l'encadré ci-dessous prend pour argument un nombre complexe z et a pour objectif de renvoyer l'image de z par f. Compléter la ligne `x=` .

```
def image(z):

    x= ..................................................

    return x
```

III. (6 points : 2 points + 2 points + 2 points)

Soit z un nombre complexe quelconque.
Écrire chacune des expressions ci-dessous sous la forme $|z-......|$ ou $|z+......|$, les pointillés devant être remplacés par le nombre complexe qui convient. Justifier sur les lignes en dessous.

$$|\bar{z}-3\text{i}| = ... \qquad |\text{i}z+1| = ... \qquad \left|\text{i}-\frac{z}{\text{i}}\right| = ...$$

....

....

....

....

IV. (3 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Sur le graphique ci-dessous, hachurer l'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que $\text{Re}\left(z^2\right) \geqslant 0$.

Corrigé de l'interrogation écrite du 19-1-2023

I.

1°) La fonction Python d'en-tête `def select_pairs(L):` donnée dans l'encadré ci-dessous prend pour argument une liste L d'entiers relatifs et a pour but de renvoyer la liste des éléments de L qui sont pairs.
Par exemple, pour la liste `[-3,2,0,1,4]`, la fonction doit renvoyer la liste `[2,0,4]`.
Compléter les pointillés.

```
def select_pairs(L):
    M=[x for x in L if x%2==0]
    return M
```

`for x in L :` : On parcourt la liste L.

2°) Compléter la fonction Python d'en-tête `def select_pairs_bis(L):` dans l'encadré ci-dessous afin qu'elle fasse la même chose que la fonction de la question précédente.

```
def select_pairs_bis(L):
    M=[]
    for x in L:
        if x%2==0:
           M.append(x)
    return M
```

La fonction suivante, plus intuitive dans sa conception, serait correcte à première vue, mais, en fait, elle ne marche pas.

```
def select_pairs_ter(L):
    for x in L:
        if x%2!=0:
           L.remove(x)
    return L
```

`if x%2!=0:` ou `if x%2==1:`

Par exemple, pour la liste `[-3,0,2,5,1,4,3,44,0,35,5]`, elle renvoie la liste `[0, 2, 1, 4, 44, 0, 5]`.
Il s'agit d'un problème de décalage d'indices facile à comprendre (et intéressant à comprendre).

II.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(z)=(|z|-2)\overline{z}$ pour tout nombre complexe z.

1°) Calculer les images de -3i et $\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}$ par f. Écrire les calculs en colonnes.

On calcule à part $|-3\text{i}|$ et $\left|\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}\right|$.
Cela évite d'alourdir les calculs.

$|-3\text{i}|=3$ (sans calculs, propriété du cours) donc $f(-3\text{i})=(3-2)\times\left(\overline{-3\text{i}}\right)=1\times 3\text{i}=3\text{i}$.

$\left|\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}\right|=2$ (calcul mental, évident) donc $f\left(\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}\right)=(2-2)\times\overline{\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}}=0\times\left(\sqrt{2}-\text{i}\sqrt{2}\right)=0$.

On vérifie les deux calculs à l'aide de la calculatrice.

2°) La fonction Python d'en-tête `def image(z):` donnée dans l'encadré ci-dessous prend pour argument un nombre complexe z et a pour objectif de renvoyer l'image de z par f. Compléter la ligne `x=` .

```
def image(z):
    x=(abs(z)-2)*z.conjugate()
    return x
```

`z.conjugate()` : il y a des parenthèses après le conjugate.

III.

Soit z un nombre complexe quelconque.
Écrire chacune des expressions ci-dessous sous la forme $|z-......|$ ou $|z+......|$, les pointillés devant être remplacés par le nombre complexe qui convient. Justifier sur les lignes en dessous.

$$\left|\overline{z}-3\text{i}\right|=|z+3\text{i}| \qquad |\text{i}z+1|=|z-\text{i}| \qquad \left|\text{i}-\frac{z}{\text{i}}\right|=|z+1|$$

On ne repasse surtout pas par la forme algébrique de z.

$\left|\overline{z}-3\text{i}\right|=\left|\overline{z+3\text{i}}\right|=|z+3\text{i}|$ (propriété : « Le module du conjugué d'un nombre complexe est égal au module du nombre complexe »)

$|\text{i}z+1|=|\text{i}(z-\text{i})|=|\text{i}|\times|z-\text{i}|=|z-\text{i}|$ (propriété : « Le module d'un produit est égal au produit des modules »)

$\left|\text{i}-\frac{z}{\text{i}}\right|=|\text{i}-(-\text{i})z|=|\text{i}+\text{i}z|=|\text{i}|\times|z+1|=1\times|z+1|=|z+1|$

Énorme faute : $|z+3\mathrm{i}| = \sqrt{z^2+3^2}$

IV.

Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Sur le graphique ci-dessous, hachurer l'ensemble *E* des points M de *P*, d'affixe *z*, tels que $\mathrm{Re}\left(z^2\right) \geqslant 0$.

Soit M un point quelconque de *P* d'affixe *z*.
On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

On va déterminer $\mathrm{Re}\left(z^2\right)$ en fonction de *x* et de *y*.

Pour cela, on va chercher la forme algébrique de z^2.

$$z^2 = (x+\mathrm{i}y)^2$$

$$= x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$$

Cette dernière égalité donne la forme algébrique de z^2 et permet d'en déduire que $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = x^2 - y^2$ et que $\mathrm{Im}\left(z^2\right) = 2xy$.

$$\mathrm{M} \in E \iff \mathrm{Re}\left(z^2\right) \geqslant 0$$

$$\iff x^2 - y^2 \geqslant 0$$

$$\iff (x+y)(x-y) \geqslant 0 \quad \text{(signifie que } x+y \text{ et } x-y \text{ de même signe)}$$

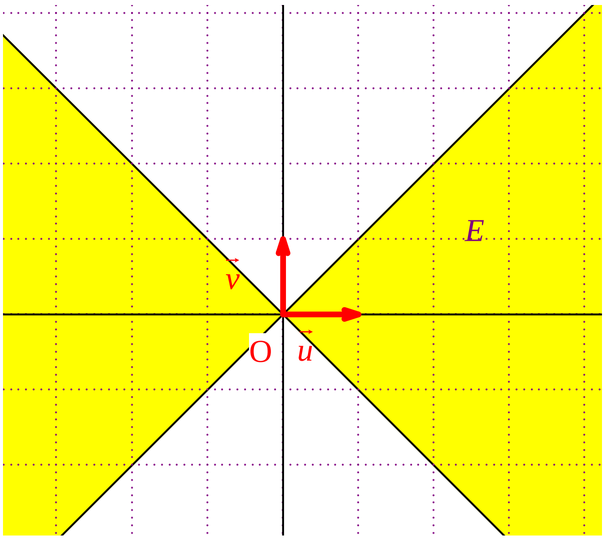
$$\iff \begin{cases} x+y \geqslant 0 \\ x-y \geqslant 0 \end{cases} \boxed{\text{ou}} \begin{cases} x+y \leqslant 0 \\ x-y \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{(il s'agit d'une équivalence fondamentale)}$$

$$\iff \begin{cases} y \geqslant -x \\ y \leqslant x \end{cases} \boxed{\text{ou}} \begin{cases} y \leqslant -x \\ y \geqslant x \end{cases}$$

$$\iff -x \leqslant y \leqslant x \ \boxed{\text{ou}}\ x \leqslant y \leqslant -x$$

E est la réunion de deux quadrants (premier et troisième quadrant).

On trace les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.



Autre méthode :

$$\mathrm{M} \in E \iff \mathrm{Re}\left(z^2\right) \geqslant 0$$

$$\iff x^2 - y^2 \geqslant 0$$

$$\iff x^2 \geqslant y^2$$

$$\iff \sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{y^2}$$

$$\iff |\,x\,| \geqslant |\,y\,|$$

$$\iff |\,y\,| \leqslant |\,x\,|$$

$$\iff -|\,x\,| \leqslant y \leqslant |\,x\,|$$