T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 10 février 2023

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{2-x^2}_{X} \right) = ... \\ \\ \lim\limits_{X \to ...} .... = ... \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ... \ .$$

II. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\left(\mathrm{e}^x\right)}$ définie sur $\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{.........}_{X} = ... \\ \lim\limits_{X \to ...} ..... = ... \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ... \ .$$

III. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points 3°) 2 points + 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2} - x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

………………………………………………	………………………………………………

2°) On rappelle l'inégalité suivante qui découle de la convexité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ pour tout réel x.

À l'aide de cette inégalité, déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ en rédigeant (pas de tableau de variations).

……

……

3°) Étudier la convexité de *f*. Répondre en faisant un tableau.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, préciser ses coordonnées.

……..

……..

IV. (5 points : 3 points + 2 points)

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne les points $\text{A}\left(5\,;-2\,;0\right)$ et $\text{B}\left(3\,;3\,;3\right)$.
On note également *D* et *D'* les droites définies par les systèmes d'équations paramétriques respectifs

$$\begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = -7t + 1 \\ z = -2t - 3 \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right) \text{ et } \begin{cases} x = -t' - 5 \\ y = 4t' + 2 \\ z = -2t' + 13 \end{cases} \left(t' \in \mathbb{R}\right)$$

ainsi que *P* le plan d'équation $z = -2$.

Compléter directement les phrases ci-dessous et détailler la démarche pour l'une des deux, au choix, sur la feuille annexe.

• Le point d'intersection E de la droite $\left(\text{AB}\right)$ et du plan *P* a pour coordonnées ……………… .

• Les droites *D* et *D'* se coupent au point F de coordonnées ……………… .

Question bonus (1 point) :

Existe-t-il des points de *D* dont l'une des coordonnées est égale à 2023 et les deux autres coordonnées sont des entiers relatifs ? Si oui, donner leurs coordonnées.

……………………………………..

V. (4 points : 2 points + 2 points)

Dans le plan *P* muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne le point $\text{A}\left(-2\,;-1\right)$ ainsi que la droite *D* d'équation cartésienne $x + 2y - 5 = 0$. On fera un graphique sur la feuille annexe.

• Écrire sans justifier un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à *D*.

• Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur *D*. Vérifier sur le graphique.

……………

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………

V.

Rappel :

Soit D une droite du plan P, d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ où a, b, c sont trois réels, a et b n'étant pas tous les deux nuls.
Le vecteur $\vec{v}\left(a\,;b\right)$ est un vecteur normal à D.

Graphique :

IV.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 10-2-2023

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{2-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{2-x^2}_{X}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

On vérifie cette limite graphiquement en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.
La courbe admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{\left(e^x\right)}$ définie sur $\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{e^x}_{X} = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} e^X = 1 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

On vérifie cette limite graphiquement en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.
La courbe admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $-\infty$.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2} - x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = e^x - x - 1$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = e^x - 1$

2°) On rappelle l'inégalité suivante qui découle de la convexité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$e^x \geqslant x + 1$ pour tout réel x.

À l'aide de cette inégalité, déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ en rédigeant (pas de tableau de variations).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geqslant x + 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x - x - 1 \geqslant 0$ ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \geqslant 0$.

On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

On vérifie en traçant la courbe représentative de *f* sur l'écran de la calculatrice.

Complément :

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

f' s'annule donc en un seul réel : 0.

Comme f' est toujours positive et s'annule en un seul réel (donc en un nombre fini de valeurs), on en déduit que *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On pourrait éventuellement dresser le tableau de variations de *f* sur $\mathbb{R}$.

3°) Étudier la convexité de *f*. Répondre en faisant un tableau.

On étudie le signe de la dérivée seconde de *f*.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité de *f*		concave		convexe	

f est concave sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

f est convexe sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, préciser ses coordonnées.

On a les conditions suivantes :

C_1 : f'' s'annule pour $x=0$;

C_2 : f'' change de signe pour $x=0$.

$\mathcal{C}$ admet donc le point A d'abscisse 0 pour point d'inflexion.

L'ordonnée de A est égale à $f(0)=\mathrm{e}^0-\dfrac{0^2}{2}-0=1$.
Le point A a donc pour coordonnées $\mathrm{A}(0\,;1)$.

On vérifie graphiquement ce résultat en traçant la courbe représentative de *f* sur l'écran de la calculatrice.

IV.

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne les points $\text{A}\left(5\,;-2\,;0\right)$ et $\text{B}\left(3\,;3\,;3\right)$.

On note également D et D' les droites définies par les systèmes d'équations paramétriques respectifs
$\begin{cases} x = 4t+2 \\ y = -7t+1 \\ z = -2t-3 \end{cases}$ $\left(t \in \mathbb{R}\right)$ et $\begin{cases} x = -t'-5 \\ y = 4t'+2 \\ z = -2t'+13 \end{cases}$ $\left(t' \in \mathbb{R}\right)$ ainsi que P le plan d'équation $z = -2$.

Compléter directement les phrases ci-dessous et détailler la démarche pour l'une des deux, au choix, sur la feuille annexe.

• Le point d'intersection E de la droite $\left(\text{AB}\right)$ et du plan P a pour coordonnées $\left(\dfrac{19}{3}\,;-\dfrac{16}{3}\,;-2\right)$.

• Les droites D et D' se coupent au point F de coordonnées $\left(-10\,;22\,;3\right)$.

• Calcul des coordonnées de E :

On commence par déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\left(\text{AB}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $\left(-2\,;5\,;3\right)$.

La droite $\left(\text{AB}\right)$ admet pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 5-2\lambda \\ y = -2+5\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$ $\left(\lambda \in \mathbb{R}\right)$.

Comme $\text{E} \in P$, on a $z_{\text{E}} = -2$.

Le paramètre λ du point E sur $\left(\text{AB}\right)$ vérifie l'égalité $3\lambda = -2 \quad \left(1\right)$.

$$\left(1\right) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

$$x_{\text{E}} = 5-2\times\left(-\frac{2}{3}\right) = 5+\frac{4}{3} = \frac{19}{3}$$

$$y_{\text{E}} = -2+5\times\left(-\frac{2}{3}\right) = -2-\frac{10}{3} = -\frac{16}{3}$$

E a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{19}{3}\,;-\dfrac{16}{3}\,;-2\right)$.

Avec la calculatrice, on peut résoudre directement le système $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -2 + 5t \\ z = 3t \\ z = -2 \end{cases}$.

● Calcul des coordonnées de F :

Considérons le système (I) $\begin{cases} 4t + 2 = -t' - 5 & (1) \\ -7t + 1 = 4t' + 2 & (2) \\ -2t - 3 = -2t' + 13 & (3) \end{cases}$ d'inconnue $(t, t') \in \mathbb{R}^2$.

Il s'agit d'un système linéaire de 3 équations à 2 inconnues.

On peut éventuellement utiliser la calculatrice pour résoudre le système.

On peut même résoudre directement le système $\begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = -7t + 1 \\ z = -2t - 3 \\ x = -t' - 5 \\ y = 4t' + 2 \\ z = -2t' + 13 \end{cases}$ à l'aide de la calculatrice.

Ce système est pléthorique en équations par rapport au nombre d'inconnues.

Méthode :

On prend le système formé par deux équations (sous-système).
On regarde ensuite si la troisième équation – celle qui n'a pas été prise dans le système – est vérifiée par les valeurs de t et t'.

On considère le système $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$ (sous-système formé des équations (1) et (2)).
Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.
Il y a donc plusieurs façons de le résoudre : méthode par substitution, méthode par combinaisons, éventuellement méthode matricielle.
En général, la méthode par combinaisons est à privilégier mais ici, la méthode par substitution marche très bien.

$(1) \Leftrightarrow t' = -4t - 7 \quad (1')$

En remplaçant t' par $-4t - 7$ dans (2), on obtient $-7t + 1 = 4(-4t - 7) + 2$ qui donne $9t = -27$ soit $t = -3$.

$(1')$ donne alors $t' = -4 \times (-3) - 7 = 5$

On regarde si l'égalité (3) est vérifiée pour $t = -3$ et $t' = 5$.

On a $-2\times(-3)-3=3$ et $-2\times 5+13=3$.

L'égalité (3) est donc vérifiée pour $t=-3$ et $t'=5$.

On obtient donc un unique couple solution pour le système (I), ce qui permet d'affirmer que les droites D et D' sont sécantes en un point F.

Pour déterminer les coordonnées de F, on remplace t par – 3 dans le système d'équations paramétriques de D ou t' par 5 dans le système paramétrique de D'.

$$\mathrm{F}\left|\begin{array}{l} x_{\mathrm{F}}=4\times(-3)+2=-10 \\ y_{\mathrm{F}}=-7\times(-3)+1=22 \\ z_{\mathrm{F}}=-2\times(-3)-3=3 \end{array}\right.$$

Question bonus (1 point) :

Existe-t-il des points de D dont l'une des coordonnées est égale à 2023 et les deux autres coordonnées sont des entiers relatifs ? Si oui, donner leurs coordonnées.

● Cherchons s'il existe un point de D tel que
l'abscisse soit égale à 2023 ;
l'ordonnée et la cote soient des entiers relatifs.

Pour cela, on résout l'équation $4t+2=2023$.
On obtient immédiatement $t=\dfrac{2021}{4}$.
En remplaçant dans les deux autres équations paramétriques de D, on obtient une ordonnée et une cote qui ne sont pas des entiers relatifs.
Il n'existe donc pas de point de D satisfaisant les conditions.

● Cherchons s'il existe un point de D tel que
l'ordonnée soit égale à 2023 ;
l'abscisse et la cote soient des entiers relatifs.

Pour cela, on résout l'équation $-7t+1=2023$.
On obtient immédiatement $t=-\dfrac{2022}{7}$.
En remplaçant dans les deux autres équations paramétriques de D, on obtient une abscisse et une cote qui ne sont pas des entiers relatifs.
Il n'existe donc pas de point de D satisfaisant les conditions.

● Cherchons s'il existe un point de D tel que
la cote soit égale à 2023 ;
l'abscisse et l'ordonnée soient des entiers relatifs.

Pour cela, on résout l'équation $-2t-3=2023$.
On obtient immédiatement $t=-1013$.
En remplaçant dans les deux autres équations paramétriques de D, on obtient une abscisse et une ordonnée qui sont des entiers relatifs :
$x=4\times(-1013)+2=-4050$
$y=-7\times(-1013)+1=7092$

Il existe donc un unique point de D dont l'une des coordonnées est égale à 2023 et les deux autres coordonnées sont des entiers relatifs. Il s'agit du point de coordonnées : $\left(-4050\,;7092\,;2023\right)$.

Avec la calculatrice, on peut résoudre directement les systèmes : $\begin{cases} x=4t+2 \\ y=-7t+1 \\ z=-2t-3 \\ x=2023 \end{cases}$; $\begin{cases} x=4t+2 \\ y=-7t+1 \\ z=-2t-3 \\ y=2023 \end{cases}$; $\begin{cases} x=4t+2 \\ y=-7t+1 \\ z=-2t-3 \\ z=2023 \end{cases}$.

V.

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne le point $\text{A}\left(-2\,;-1\right)$ ainsi que la droite D d'équation cartésienne $x+2y-5=0$. On fera un graphique sur la feuille annexe.

On cherche deux points de D à coordonnées entières. On peut éventuellement utiliser l'équation réduite de D. On peut tracer la droite D sur l'écran de la calculatrice directement grâce à l'équation cartésienne $x+2y-5=0$.

• Écrire sans justifier un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à D.

$$\begin{cases} x=t-2 \\ y=2t-1 \end{cases} \quad \left(t\in\mathbb{R}\right)$$

D'après l'équation cartésienne de D, le vecteur $\vec{v}\left(1\,;2\right)$ est un vecteur normal à D.

Comme $\Delta \perp D$ par hypothèse, le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ.

Un système d'équations paramétriques de Δ s'écrit : $\begin{cases} x=t-2 \\ y=2t-1 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

• Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur D. Vérifier sur le graphique.

$$\text{H}\left(-\frac{1}{5}\,;\frac{13}{5}\right)$$

Par définition d'un projeté orthogonal sur une droite, H est le point d'intersection de la droite Δ avec la droite D.

Le paramètre t du point H sur Δ vérifie l'égalité $\left(t-2\right)+2\left(2t-1\right)-5=0 \quad \left(1\right)$.

$$\begin{aligned} \left(1\right) &\Leftrightarrow 5t-9=0 \\ &\Leftrightarrow t=\frac{9}{5} \end{aligned}$$

$$\text{H}\left|\begin{array}{l} x_{\text{H}}=\dfrac{9}{5}-2=-\dfrac{1}{5} \\ y_{\text{H}}=2\times\dfrac{9}{5}-1=\dfrac{18}{5}-1=\dfrac{13}{5} \end{array}\right.$$

On peut vérifier ce résultat en résolvant directement le système $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 2t - 1 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$ à l'aide de la calculatrice.

Graphique :

• On cherche deux points de D à coordonnées entières.
Les points $\mathrm{E}(1\,;2)$ et $\mathrm{F}(5\,;0)$ appartiennent à D.

• Pour tracer Δ, on utilise l'équerre.