T spécialité

Contrôle du lundi 30 janvier 2023 (4 heures)

● L'énoncé comporte trois parties notées chacune sur 20.

● On rédigera une copie par partie.

Partie 1 (probabilités)

I. (12 points)

On considère un système de communication binaire transmettant des 0 et des 1. Chaque 0 ou 1 est appelé bit (de l'anglais *binary digit*). En raison d'interférences, il peut y avoir des erreurs de transmission : un 0 peut être reçu comme un 1 et, de même, un 1 peut être reçu comme un 0.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On sait que :

● la probabilité que le bit envoyé soit 0 est égale à 0,4 ;

● la probabilité que le bit reçu soit 1 sachant que le bit envoyé est 0 est égale à 0,01 ;

● la probabilité que le bit reçu soit 0 sachant que le bit envoyé est 1 est égale à 0,02.

Faire un arbre de probabilités avec les événements définis de la manière suivante :

- E_0 est l'événement « Le bit envoyé est un 0 » ;
- E_1 est l'événement « Le bit envoyé est un 1 » ;
- R_0 est l'événement « Le bit reçu est un 0 » ;
- R_1 est l'événement « Le bit reçu est un 1 ».

On donnera les résultats en valeur exacte sous forme décimale, sauf pour la question 3°) où l'on donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

1°) Calculer la probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0.

2°) Calculer la probabilité que le bit reçu soit un 0.

3°) Calculer la probabilité que le bit envoyé soit un 0 sachant que le bit reçu est un 1.

4°) Calculer la probabilité de l'événement A : « Il y a une erreur de transmission ».

Partie B (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Un message de longueur huit bits est appelé un octet. On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

1°) On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.

Déterminer la valeur arrondie au millième de la probabilité qu'exactement 7 octets soient transmis sans erreur.

2°) On transmet successivement n octets de façon indépendante, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Exprimer en fonction de n la probabilité qu'au moins un octet soit transmis sans erreur.

II. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points + 2 points ; 3°) 2 points)

Un élève répond au hasard à toutes les questions d'un vrai-faux qui comporte 4 questions.
Le correcteur attribue 5 points par réponse exacte mais enlève 2 points par réponse erronée. La note est 0 si le total des points est négatif.

On note X la note obtenue par l'élève.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X.
On fera directement un tableau après avoir précisé les valeurs que peut prendre X.

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

3°) La fonction Python d'en-tête `def simul():` donnée dans le cadre ci-dessous a pour but de renvoyer une réalisation de la variable aléatoire X.
On suppose que la fonction `randint` de la bibliothèque `random` a été préalablement importée.
On précise que l'instruction `r=randint(0,1)` permet de choisir un entier aléatoire égal à 0 ou à 1.
Si cet entier est 0, on convient qu'il s'agit d'une mauvaise réponse ; si cet entier est 1, on convient qu'il s'agit d'une bonne réponse.
Recopier et compléter les deux instructions `x=`….. .

```
def simul():
    x=0
    for i in range(4):
        r=randint(0,1)
        if r==1:
           x=x+5
         else:
           x=……..
    if x<0:
       x=…..
    return x
```

Partie 2 (analyse)

I. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 3 points ; 4°) 1 point ; 5°) 2 points ; 6°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto ax + b\ln x$ définie sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$ où a et b sont deux réels et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On sait que $\mathcal{C}$ passe par le point $\text{A}(1\,;2)$ et admet une tangente T de coefficient directeur 1 en ce point.

1°) Démontrer que l'expression de f est donnée par $f(x) = 2x - \ln x$ en expliquant la démarche.

2°) Déterminer la limite de f en 0^+ en détaillant bien la démarche.
Que peut-on déduire pour $\mathcal{C}$ de cette limite ?

3°) Donner l'expression de $f'(x)$ sous la forme d'un seul quotient puis dresser un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction f.

Mettre les limites ainsi que la valeur de l'extremum. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Tracer $\mathcal{C}$ avec soin sur la feuille annexe.
On placera le point A et l'on tracera la tangente T ainsi que la tangente horizontale.

4°) La fonction f est-elle convexe ou concave sur I ? Justifier.

5°) Soit B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse e.
On note D la tangente à $\mathcal{C}$ en B.
Déterminer une équation de D ; en déduire que D passe par O.

6°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel quelconque de l'intervalle I et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de n.
On admettra que tous les termes de la suite appartiennent à I.
On rappelle que pour tout réel $x > 0$, on a $\ln x < x$.
Déterminer le sens de variation de (u_n).

Questions bonus :

Question 1 :

Pour tout réel $m > 0$, on note M et N les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives m et $\dfrac{1}{m}$.

On note U le milieu de $[\text{MN}]$.
Calculer les coordonnées de U en fonction de m.
En déduire que tous les points U appartient à une même droite Δ dont on donnera une équation.
Préciser l'ensemble des points U lorsque m décrit I.

Question 2 :

On note E et F les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 2 et 4.
Démontrer que E le milieu de $[\text{OF}]$.

II. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 2 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0=1$ et $v_0=3$ ainsi que par les relations de récurrence $\begin{cases} u_{n+1}=2u_n+v_n \\ v_{n+1}=u_n+2v_n \end{cases}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.

2°) Pour tout entier naturel *n* on pose $x_n=u_n+v_n$.
Démontrer que la suite (x_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire, pour tout entier naturel *n*, l'expression de x_n en fonction de *n*.

3°) Pour tout entier naturel *n* on pose $y_n=u_n-v_n$.
Démontrer que la suite (y_n) est une suite constante.
En déduire la valeur de tous les termes de cette suite.

4°) À l'aide des questions précédentes, exprimer u_n et v_n en fonction de *n*.

5°) La fonction Python d'en-tête `def termes(n):` donnée dans le cadre ci-dessous prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et a pour objectif de renvoyer les valeurs de u_n et v_n.

```
def termes(n):
    u,v=1,3
    for i in range(1,n+1):

        u,v=.....................

    return u,v
```

Recopier et compléter l'instruction `u,v=`............ .

Partie 3 (géométrie)

I. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 2 points)

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne les points $\mathrm{A}(1\,;0\,;2)$, $\mathrm{B}(2\,;1\,;0)$, $\mathrm{C}(0\,;1\,;2)$, $\mathrm{D}(1\,;-2\,;4)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}\,(2\,;1\,;-1)$ et $\vec{v}\,(-1\,;-2\,;3)$.

1°) On note Δ la droite passant par le point D et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur.
Parmi les points suivants, indiquer, en justifiant, celui qui appartient à Δ. Justifier.

$\mathrm{E}(-5\,;-5\,;1)$ $\qquad$ $\mathrm{F}(-3\,;-4\,;2)$ $\qquad$ $\mathrm{G}(-3\,;-4\,;6)$

2°) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\vec{v}$ sont coplanaires.

3°) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ', parallèle à (AB) passant par C.

4°) Quelles sont les coordonnées du point H tel que $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$?

5°) On note Δ'' la droite définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Elle est parallèle à l'une des droites suivantes. Préciser laquelle.

(AB) $\qquad$ (CD) $\qquad$ (BC) $\qquad$ (BD)

II. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Soit ABCDEFGH un pavé droit tel que $\mathrm{AB} = 5$, $\mathrm{AD} = 3$, $\mathrm{AE} = 2$.
On note M le point du segment $[\mathrm{GH}]$ tel que $\mathrm{HM} = x$ où x est un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;5]$.

1°) Exprimer AM^2 en fonction de x.

2°) Calculer l'aire du triangle ABM.

3°) Calculer le volume de la pyramide MABCD.

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit A, B, C, D quatre points quelconques de l'espace. Soit α et β deux réels donnés.
On note I, J, K, L les points définis par $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DK}} = \beta\overrightarrow{\mathrm{DB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DL}} = \beta\overrightarrow{\mathrm{DC}}$.

1°) Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

2°) On suppose dans cette question que :

- α et β sont non nuls ;
- les points B et C sont distincts.

Quelle est la position relative des droites (IJ) et (KL) ? Justifier.

Numéro : …..

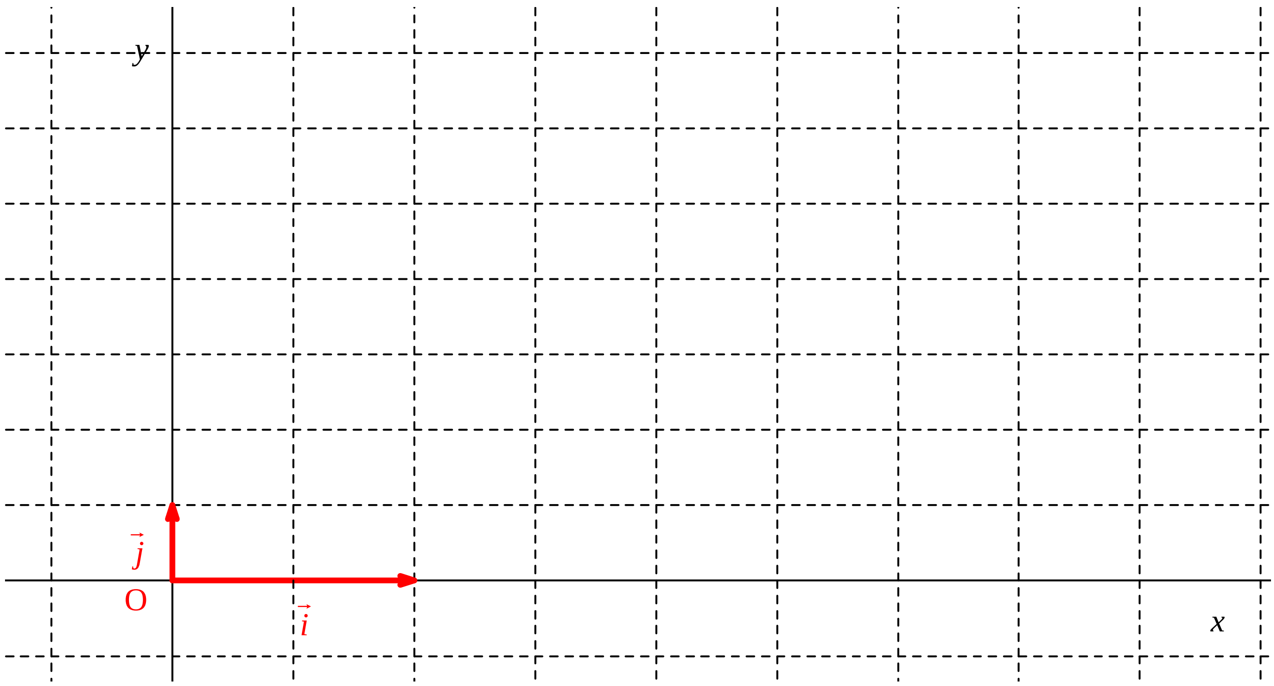
Prénom et nom : ……………….…………………………………

Note : ….. / 20

Feuille annexe

Partie 2

I. 3°)



Partie 1

I. (12 points)

Partie A (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

1°)	
2°)	
3°)	
4°)	

Partie B (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°)	
2°)	

Corrigé du contrôle du 30-1-2023

Partie 1 (probabilités)

I.

On considère un système de communication binaire transmettant des 0 et des 1. Chaque 0 ou 1 est appelé bit (de l'anglais *binary digit*). En raison d'interférences, il peut y avoir des erreurs de transmission : un 0 peut être reçu comme un 1 et, de même, un 1 peut être reçu comme un 0.
Les deux parties sont indépendantes.

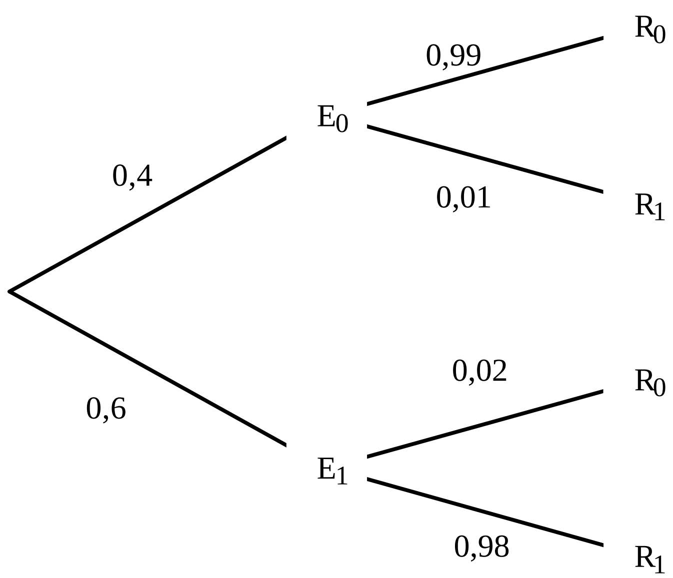
Partie A

On sait que :
● la probabilité que le bit envoyé soit 0 est égale à 0,4 ;

● la probabilité que le bit reçu soit 1 sachant que le bit envoyé est 0 est égale à 0,01 ;

● la probabilité que le bit reçu soit 0 sachant que le bit envoyé est 1 est égale à 0,02.

Faire un arbre de probabilités avec les événements définis de la manière suivante :
• E_0 est l'événement « Le bit envoyé est un 0 » ;
• E_1 est l'événement « Le bit envoyé est un 1 » ;
• R_0 est l'événement « Le bit reçu est un 0 » ;
• R_1 est l'événement « Le bit reçu est un 1 ».



On donnera les résultats en valeur exacte sous forme décimale, sauf pour la question 3°) où l'on donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

1°) Calculer la probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0.

On cherche $P\left(\mathrm{E}_0 \cap \mathrm{R}_0\right)$.

$$\begin{aligned} P\left(\mathrm{E}_0 \cap \mathrm{R}_0\right) &= P\left(\mathrm{E}_0\right) \times P\left(\mathrm{R}_0/\mathrm{E}_0\right) \\ &= 0,4 \times 0,99 \\ &= 0,396 \end{aligned}$$

2°) Calculer la probabilité que le bit reçu soit un 0.

On cherche $P\left(\mathrm{R}_0\right)$.

On sait que E_0 et E_1 forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P\left(\mathrm{R}_0\right) &= P\left(\mathrm{E}_0 \cap \mathrm{R}_0\right) + P\left(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{R}_0\right) \\ &= P\left(\mathrm{E}_0 \cap \mathrm{R}_0\right) + P\left(\mathrm{E}_1\right) \times P\left(\mathrm{R}_0 / \mathrm{E}_1\right) \\ &= 0,396 + 0,6 \times 0,02 \\ &= 0,408 \end{aligned}$$

3°) Calculer la probabilité que le bit envoyé soit un 0 sachant que le bit reçu est un 1.

On doit calculer $P\left(\mathrm{E}_0 / \mathrm{R}_1\right)$ (probabilité conditionnelle de A sachant B).

$$\begin{aligned} P\left(\mathrm{E}_0 / \mathrm{R}_1\right) &= \frac{P\left(\mathrm{E}_0 \cap \mathrm{R}_1\right)}{P\left(\mathrm{R}_1\right)} \quad \text{(formule de définition d'une probabilité conditionnelle)} \\ &= \frac{P\left(\mathrm{E}_0\right) \times P\left(\mathrm{R}_1 / \mathrm{E}_0\right)}{P\left(\mathrm{R}_1\right)} \\ &= \frac{0,4 \times 0,01}{1 - 0,408} \quad \left(P\left(\mathrm{R}_1\right) = 1 - P\left(\mathrm{E}_1\right)\right) \\ &= \frac{0,004}{0,592} \\ &= \frac{4}{592} \\ &= \frac{1}{148} \quad \text{(valeur exacte en fraction irréductible)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{148} = 0,00696...$$

4°) Calculer la probabilité de l'événement A : « Il y a une erreur de transmission ».

Il y a une erreur de transmission dans les deux cas suivants :
- le bit envoyé est 0 et il est reçu comme un 1 ;
- le bit envoyé est 1 et il est reçu comme un 0.

La probabilité de A est égale à la probabilité que le bit envoyé est 0 et il est reçu comme un 1 ou bit envoyé est 1 et il est reçu comme un 0.

$\mathrm{A} = \left(\mathrm{E}_0 \cap \mathrm{R}_1\right) \cup \left(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{R}_0\right)$

Les événements $\mathrm{E}_0 \cap \mathrm{R}_1$ et $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{R}_0$ sont incompatibles (car E_0 et E_1 sont incompatibles ou R_1 et R_0 sont incompatibles).

$$P(\mathrm{A}) = P\left(\mathrm{E}_0 \cap \mathrm{R}_1\right) + P\left(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{R}_0\right)$$

$$= 0,4 \times 0,01 + 0,6 \times 0,08$$

$$= 0,016$$

Partie B

Un message de longueur huit bits est appelé un octet. On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

1°) On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.

Déterminer la valeur arrondie au millième de la probabilité qu'exactement 7 octets soient transmis sans erreur.

L'épreuve « transmettre un octet » est une épreuve de Bernoulli qui conduit soit à l'événement S : « L'octet est transmis sans erreur » (succès) soit à son contraire $\overline{\mathrm{S}}$ (échec)

D'après l'énoncé, la probabilité de S est $p = 0,88$.

On répète l'épreuve 10 fois dans des conditions identiques indépendantes.

Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'octets transmis sans erreur.

X suit la loi binomiale de paramètres 10 (nombre de répétitions) et 0,88 (probabilité qu'un transmet soit transmis sans erreur).

On utilise la calculatrice pour déterminer les différents résultats des probabilités demandées.

On note P la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

Avec la calculatrice, on obtient :

$P(\mathrm{X} = 7) = 0,0847429...$ (il s'agit d'un nombre décimal car la probabilité d'un succès est un nombre décimal)

La valeur arrondie au millième de cette probabilité est donc 0,085.

Avec la formule donnant la probabilité d'une valeur pour une variable aléatoire qui suit une loi binomiale, on obtient $P(\text{X}=7)=\binom{10}{7}\times 0,88^7\times 0,12^3$

On calcule aisément le coefficient binomial $\binom{10}{7}$ soit à la main soit à l'aide de la calculatrice.

On trouve $\binom{10}{7}=120$, de sorte que $P(\text{X}=7)=120\times 0,88^7\times 0,12^3$.

2°) On transmet successivement n octets de façon indépendante, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. Exprimer en fonction de n la probabilité qu'au moins un octet soit transmis sans erreur.

On note F l'événement « au moins un octet est transmis sans erreur ».

① Le plus simple est de passer par l'événement contraire.

$$P(\text{F})=1-P(\overline{\text{F}})$$

$$=1-P(\text{« tous les octets sont transmis avec erreur »})$$

$$=1-(\text{probabilité qu'un octet soit transmis avec erreur})^n$$

$$=1-0,12^n$$

② On peut aussi noter Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'octets transmis sans erreur.

Y suit la loi binomiale de paramètres n (nombre de répétitions) et 0,88 (probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur).

$$P(\text{F})=P(\text{Y}\geqslant 1)$$

$$=1-P(\text{Y}=0)$$

$$=1-\binom{n}{0}\times 0,88^0\times 0,12^n$$

$$=1-0,12^n$$

II.

Un élève répond au hasard à toutes les questions d'un vrai-faux qui comporte 4 questions.
Le correcteur attribue 5 points par réponse exacte mais enlève 2 points par réponse erronée. La note est 0 si le total des points est négatif.

On note X la note obtenue par l'élève.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X.
On fera directement un tableau après avoir précisé les valeurs que peut prendre X.

On peut déterminer la note en fonction du nombre de bonnes réponses.

Nombre de bonnes réponses	0	1	2	3	4
Total des points	– 8	– 1	6	13	20
Note	0	0	6	13	20

Pour 0 bonne réponse, toutes les réponses sont fausses.
On a un total de $4\times(-2)=-8$.

Pour 1 bonne réponse, on a un total de $1\times5+3\times(-2)=-1$.

Pour 2 bonnes réponses, on a un total de $2\times5+2\times(-2)=6$.

Pour 3 bonnes réponses, on a un total de $3\times5+1\times(-2)=13$.

Pour 4 bonnes réponses, on a un total de $4\times5=20$.

On peut ensuite soit utiliser la loi binomiale soit utiliser un arbre.

La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	0	6	13	20	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\text{Total}=1$

x_i	0	6	13	20	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\text{Total}=1$

x_i	0	6	13	20	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	0,3125	0,375	0,25	0,0625	Total $=1$

Si on utilise la loi binomiale, on obtient :

P(« obtenir les 4 réponses correctes ») $= 0{,}0625$

P(« obtenir exactement 3 réponses correctes ») $= 0{,}25$

P(« obtenir exactement 2 réponses correctes ») $= 0{,}375$

P(« obtenir exactement 1 réponse correcte ») $= 0{,}25$

P(« obtenir 0 réponse correcte ») $= 0{,}0625$

La probabilité d'obtenir la note 0 s'obtient en additionnant la probabilité d'obtenir exactement une réponse correcte et la probabilité de n'obtenir aucune réponse correcte : $0{,}25+0{,}0625=0{,}3125$.

Complément :

Soit N le nombre de réponses exactes.
N suit la loi binomiale de paramètres 4 (nombre de répétitions) et $\frac{1}{2}$ (probabilité d'un succès).
La note (positive ou négative) est donnée par $\mathrm{X}=\max(6\mathrm{N}-8,0)$ (car $5\mathrm{N}+(4-\mathrm{N})\times(-2)=6\mathrm{N}-8$).

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=0\times\frac{5}{16}+6\times\frac{3}{8}+13\times\frac{1}{4}+20\times\frac{1}{16}$$

$$=\frac{27}{4}$$

$$=6{,}75$$

$$V(X)=\frac{323}{4}$$

$$=\left(0^2\times\frac{5}{16}+6^2\times\frac{3}{8}+13^2\times\frac{1}{4}+20^2\times\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{27}{4}\right)^2$$

$$=\frac{323}{4}-\frac{729}{16}$$

$$=\frac{563}{16}$$

$$=35,1875$$

3°) La fonction Python d'en-tête `def simul():` donnée dans le cadre ci-dessous a pour but de renvoyer une réalisation de la variable aléatoire X.
On suppose que la fonction `randint` de la bibliothèque `random` a été préalablement importée.
On précise que l'instruction `r=randint(0,1)` permet de choisir un entier aléatoire égal à 0 ou à 1.
Si cet entier est 0, on convient qu'il s'agit d'une mauvaise réponse ; si cet entier est 1, on convient qu'il s'agit d'une bonne réponse.
Recopier et compléter les deux instructions `x=`….. .

```
def simul():
    x=0
    for i in range(4):
        r=randint(0,1)
        if r==1:
           x=x+5
         else:
           x=x-2
    if x<0:
       x=0
    return x
```

Partie 2 (analyse)

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto ax + b\ln x$ définie sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$ où a et b sont deux réels et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On sait que $\mathcal{C}$ passe par le point $\mathrm{A}(1\,;2)$ et admet une tangente T de coefficient directeur 1 en ce point.

1°) Démontrer que l'expression de f est donnée par $f(x) = 2x - \ln x$ en expliquant la démarche.

On sait que $\mathrm{A} \in \mathcal{C}$ et que A a pour coordonnées $(1\,;2)$.

Donc on a $f(1) = 2$.

Par ailleurs, on sait que $\forall x \in I \quad f(x) = ax + b\ln x$.

On a donc $f(1) = a \times 1 + b\ln 1 = a$.

On en déduit que $a = 2$.

On sait que la tangente T à $\mathcal{C}$ en A a pour coefficient directeur 1.

On en déduit que $f'(1) = 1$.

Or $\forall x \in I \quad f(x) = 2x + b\ln x$ donc $\forall x \in I \quad f'(x) = 2 + \dfrac{b}{x}$.

On a donc $f'(1) = 2 + b$.

b vérifie l'égalité $2 + b = 1$ donc $b = -1$.

On en conclut que l'expression de f est donnée par $f(x) = 2x - \ln x$.

2°) Déterminer la limite de f en 0^+ en détaillant bien la démarche.
Que peut-on déduire pour $\mathcal{C}$ de cette limite ?

On décompose (on sépare en deux).

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} (2x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une différence } \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = 0$ c'est-à-dire l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

3°) Donner l'expression de $f'(x)$ sous la forme d'un seul quotient puis dresser un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction f.

Mettre les limites ainsi que la valeur de l'extremum. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Tracer $\mathcal{C}$ avec soin sur la feuille annexe.
On placera le point A et l'on tracera la tangente T ainsi que la tangente horizontale.

f est dérivable sur I comme différence de fonctions dérivables sur I.

$$\forall x \in I \quad f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2x-1}{x} \quad \text{(forme utile pour l'étude du signe)}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x-1$		$-$	0	$+$	
Signe de x	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
Variations de *f*	$\| +\infty$	$\searrow$	$1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule la valeur du minimum global de *f* sur $\mathbb{R}_+^*$: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} = 1 + \ln 2$.

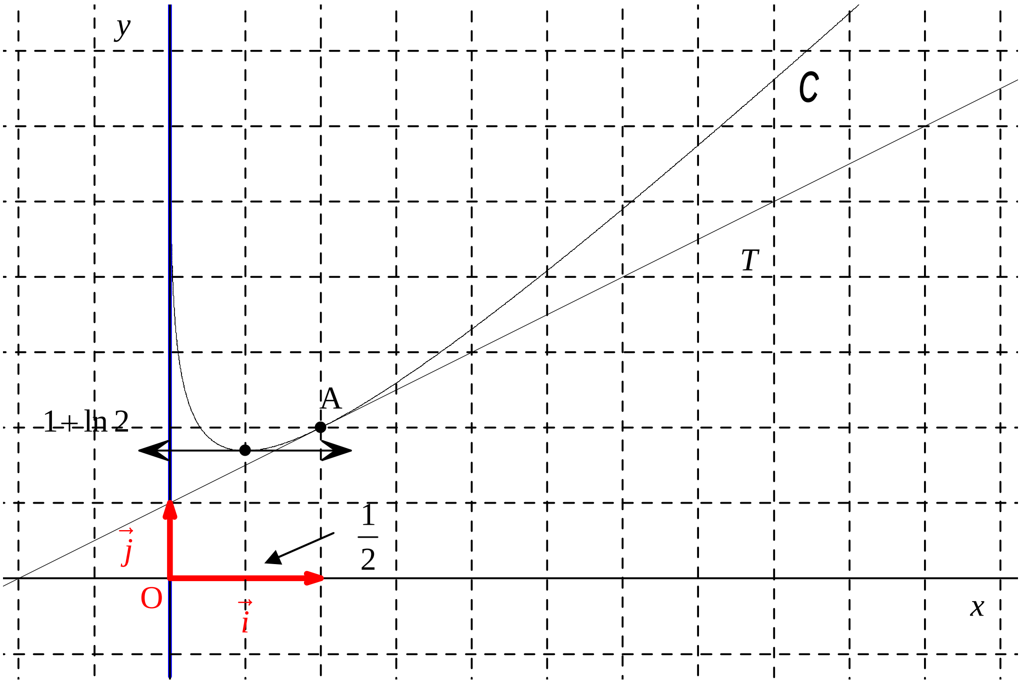
f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

On fait un petit tableau de valeurs.

Sur la deuxième ligne, on écrit des valeurs arrondies au centième.

x	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,5	2	2,5	3	4
$f(x)$	2,00	1,72	1,69	1,41	1,82	2	2,6	3,3	4,1	4,9	6,6

On place les points du tableau de valeurs.



On trace la tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

4°) La fonction *f* est-elle convexe ou concave sur *I* ? Justifier.

Pour la convexité de la fonction, on ne peut pas le dire graphiquement.
On est obligé de le justifier en utilisant la dérivée seconde.

On calcule donc la dérivée seconde de *f*.

On reprend la forme $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$ plutôt que la forme en un seul quotient.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) = \frac{1}{x^2}$

On observe immédiatement que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) > 0$ (le signe de $f''(x)$ est évident), ce qui entraîne $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) \geqslant 0$.

On en déduit que *f* est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

5°) Soit B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse e.
On note *D* la tangente à $\mathcal{C}$ en B.
Déterminer une équation de *D* ; en déduire que *D* passe par O.

$\mathrm{B}\left|\begin{array}{l} \mathrm{e} \\ 2\mathrm{e}-1 \end{array}\right.$

On a $f'(\mathrm{e}) = 2 - \frac{1}{\mathrm{e}}$ donc le coefficient directeur de *D* est égal à $2 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

D a pour équation $y = \left(2 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)(x - \mathrm{e}) + 2\mathrm{e} - 1$.

En développant le deuxième membre, on obtient $y=\left(2-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)x-\mathrm{e}\left(2-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)+2\mathrm{e}-1$ et, en poussant encore davantage, on obtient que D a pour équation $y=\left(2-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)x$.

Comme D admet une équation de la forme $y=ax$ où a est un réel, on en déduit que D passe par O.

Le résultat se vérifie grâce au tracé de la tangente sur la calculatrice (affichage en bas du coefficient directeur).

6°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=a$ où a est un réel quelconque de l'intervalle I et par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n.
On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de n.
On admettra que tous les termes de la suite appartiennent à I.
On rappelle que pour tout réel $x>0$, on a $\ln x<x$.
Déterminer le sens de variation de (u_n).

On commence par utiliser la calculatrice pour avoir une idée du comportement de la suite :
- soit en utilisant la touche $\boxed{\text{Ans}}$;
- soit en rentrant la suite dans la rubrique « Suites ».
On donne à a une valeur quelconque strictement positive.

On utilise la méthode par différence.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$$

$$=2u_n-\ln u_n-u_n$$

$$=u_n-\ln u_n$$

On doit étudier le signe de $u_n-\ln u_n$.

On sait que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\in I$.

Or $\forall x\in I\quad \ln x<x$.

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}\quad \ln u_n<u_n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n-\ln u_n>0$.

La dernière inégalité permet d'écrire $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n>0$.

On en déduit que (u_n) est strictement croissante.

Questions bonus :

Question 1 :

Pour tout réel $m>0$, on note M et N les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives m et $\frac{1}{m}$.

On note U le milieu de $[\mathrm{MN}]$.

Calculer les coordonnées de U en fonction de m.

En déduire que tous les points U appartient à une même droite Δ dont on donnera une équation.

Préciser l'ensemble des points U lorsque m décrit I.

$$\mathrm{M}\left|\begin{array}{l} m \\ 2m-\ln m \end{array}\right. \qquad \mathrm{N}\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{m} \\ \dfrac{2}{m}+\ln m \end{array}\right.$$

On calcule les coordonnées de U en appliquant la formule des coordonnées d'un milieu.

$$\mathrm{U}\left|\begin{array}{l} x_{\mathrm{U}}=\dfrac{x_{\mathrm{M}}+x_{\mathrm{N}}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(m+\dfrac{1}{m}\right) \\ y_{\mathrm{U}}=\dfrac{y_{\mathrm{M}}+y_{\mathrm{N}}}{2}=m+\dfrac{1}{m} \end{array}\right.$$

L'ensemble des points U lorsque m décrit I est la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(m+\dfrac{1}{m}\right) \\ y=m+\dfrac{1}{m} \end{cases}$ $(m\in I)$.

On observe immédiatement que $y_{\mathrm{U}}=2x_{\mathrm{U}}$.

Le point U appartient donc à la droite Δ d'équation $y=2x$.

On peut donc dire que l'ensemble des points U lorsque m décrit I est inclus dans la droite Δ.

On va chercher si le point U décrit toute la droite ou seulement une partie.

Pour cela, on regarde l'abscisse de U et on va déterminer l'ensemble décrit par cette abscisse lorsque m décrit I.

On considère la fonction $\varphi : m \mapsto \dfrac{1}{2}\left(m+\dfrac{1}{m}\right)$.

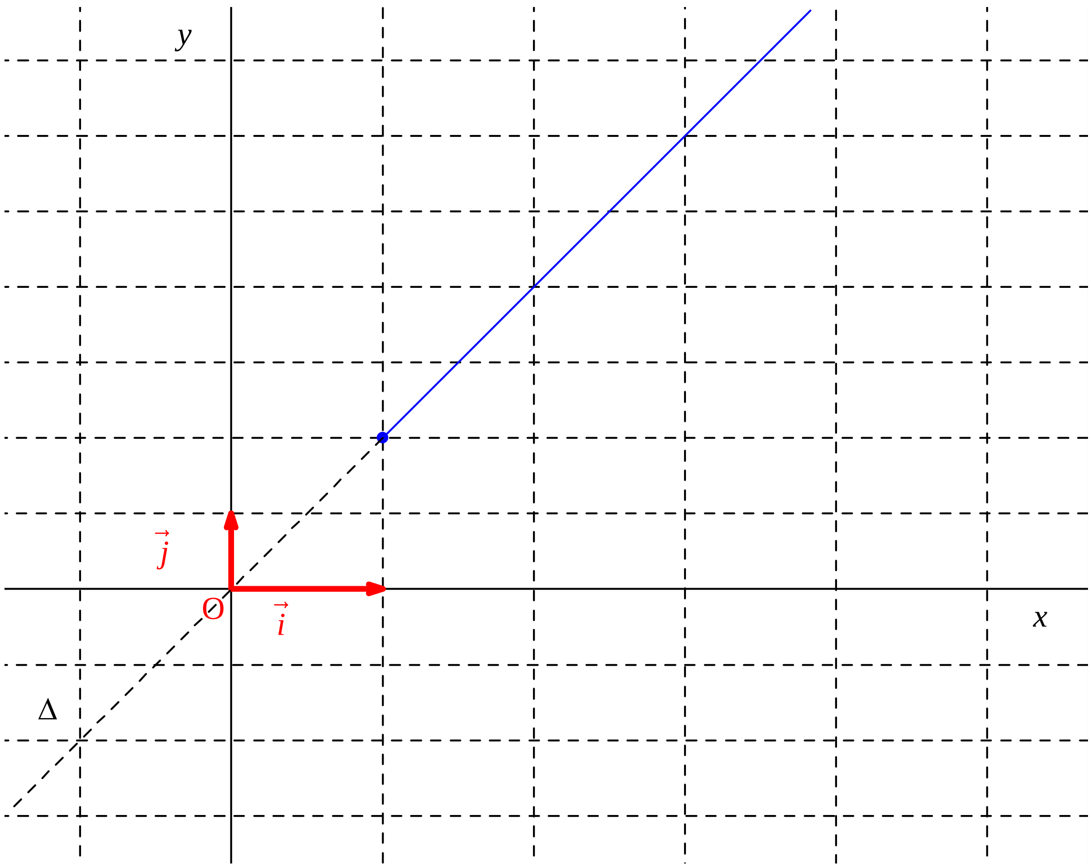
Une petite étude de fonction (avec la dérivée) permet d'obtenir le tableau de variations de φ sur I suivant :

m	0	1	$+\infty$
Variations de φ	$\Vert\ +\infty$ ↘	1 ↗	$+\infty$

On complète avec les limites en 0 à droite et en $+\infty$.

Lorsque m décrit I, on voit que $\varphi(m)$ décrit l'intervalle $[1\,;+\infty[$ (en utilisant la continuité de φ et le théorème des valeurs intermédiaires).

L'ensemble des points U lorsque m décrit I est la demi-droite définie par $y = 2x$ et $x \geqslant 1$ (2 conditions).



Question 2 :

On note E et F les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 2 et 4.

Démontrer que E le milieu de $[\text{OF}]$.

$$\text{E}\left|\begin{array}{l} 2 \\ 4-\ln 2 \end{array}\right. \qquad \text{F}\left|\begin{array}{l} 4 \\ 8-\ln 4 = 8-2\ln 2 \end{array}\right.$$

On constate que $\overrightarrow{\text{OF}} = 2\overrightarrow{\text{OE}}$.

On en déduit que E est le milieu de $[\text{OF}]$.

On peut aussi utiliser la formule des coordonnées d'un milieu.

II.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0 = 1$ et $v_0 = 3$ ainsi que par les relations de récurrence $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.

$u_1 = 2u_0 + v_0 = 2\times 1 + 3 = 5$

$v_1 = u_0 + 2v_0 = 1 + 2\times 3 = 7$

$u_2 = 2u_1 + v_1 = 2\times 5 + 7 = 17$

$v_2 = u_1 + 2v_1 = 5 + 2\times 7 = 19$

On peut rentrer les deux suites dans la calculatrice et vérifier les résultats.

2°) Pour tout entier naturel *n* on pose $x_n = u_n + v_n$.
Démontrer que la suite (x_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire, pour tout entier naturel *n*, l'expression de x_n en fonction de *n*.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} &= 2u_n + v_n + u_n + 2v_n \\ &= 3u_n + 3v_n \\ &= 3(u_n + v_n) \\ &= 3x_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (x_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $x_0 = u_0 + v_0 = 1 + 3 = 4$.
L'expression de x_n est donc $x_n = 4\times 3^n$.

3°) Pour tout entier naturel *n* on pose $y_n = u_n - v_n$.
Démontrer que la suite (y_n) est une suite constante.
En déduire la valeur de tous les termes de cette suite.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= 2u_n + v_n - (u_n + 2v_n) \\ &= u_n - v_n \\ &= y_n \end{aligned}$$

On en déduit que (y_n) est une suite constante.
Tous les termes sont égaux à $y_0 = 1 - 3 = -2$.

4°) À l'aide des questions précédentes, exprimer u_n et v_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + v_n = 4 \times 3^n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - v_n = -2$

En additionnant ces deux égalités membre à membre, on obtient $2u_n = 4 \times 3^n - 2$ puis, en divisant les deux membres par 2, on obtient $u_n = 2 \times 3^n - 1$.

En soustrayant les deux égalités membre à membre, on obtient $2v_n = 4 \times 3^n + 2$ puis, en divisant les deux membres par 2, on obtient $v_n = 2 \times 3^n + 1$.

On vérifie que ces formules « fonctionnent » pour $n = 0$.
On vérifie également la cohérence des résultats de la question 1°).

5°) La fonction Python d'en-tête `def termes(n):` donnée dans le cadre ci-dessous prend pour argument un entier naturel n et a pour objectif de renvoyer les valeurs de u_n et v_n.

```
def termes(n):
    u,v=1,3
    for i in range(1,n+1):
        u,v=2*u+v,u+2*v
    return u,v
```

Recopier et compléter l'instruction `u,v=`............. .

On complète l'instruction en utilisant les relations de récurrence.

Partie 3 (géométrie)

I.

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne les points $\mathrm{A}(1\,;0\,;2)$, $\mathrm{B}(2\,;1\,;0)$, $\mathrm{C}(0\,;1\,;2)$, $\mathrm{D}(1\,;-2\,;4)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}\,(2\,;1\,;-1)$ et $\vec{v}\,(-1\,;-2\,;3)$.

1°) On note Δ la droite passant par le point D et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur.
Parmi les points suivants, indiquer, en justifiant, celui qui appartient à Δ. Justifier.

$\mathrm{E}(-5\,;-5\,;1)$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{F}(-3\,;-4\,;2)$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{G}(-3\,;-4\,;6)$

1[ère] méthode :

On étudie si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ sont colinéaires ou non à $\vec{u}$.

Pour cela, on calcule leurs coordonnées.

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\,(-6\,;-3\,;-3)$
On observe aisément que $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ (il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \lambda\vec{u}$; l'utilisation des trois déterminants n'est pas nécessaire)

$\overrightarrow{\mathrm{DF}}\,(-4\,;-2\,;-2)$
On observe aisément que $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.

$\overrightarrow{\mathrm{DG}}\,(-4\,;-2\,;2)$
On observe que $\overrightarrow{\mathrm{DG}} = -2\vec{u}$, ce qui permet d'affirmer que $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

On en déduit que $\mathrm{G} \in \Delta$.

2[e] méthode :

On écrit un système d'équations paramétriques de Δ : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Pour savoir si le point E appartient ou non à Δ, on cherche s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_{\mathrm{E}} = 1 + 2t \\ y_{\mathrm{E}} = -2 + t \\ z_{\mathrm{E}} = 4 - t \end{cases}$.

Ce système s'écrit aussi $\begin{cases} -5 = 1 + 2t \\ -5 = -2 + t \\ 1 = 4 - t \end{cases}$ et est équivalent à $\begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = 3 \end{cases}$.

Ce système n'a pas de solution donc $\mathrm{E} \notin \Delta$.

Pour savoir si le point F appartient ou non à Δ, on cherche s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_{\mathrm{F}} = 1+2t \\ y_{\mathrm{F}} = -2+t \\ z_{\mathrm{F}} = 4-t \end{cases}$.

Ce système s'écrit aussi $\begin{cases} -3 = 1+2t \\ -4 = -2+t \\ 2 = 4-t \end{cases}$ et est équivalent à $\begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = 2 \end{cases}$.

Ce système n'a pas de solution donc $\mathrm{F} \notin \Delta$.

Pour savoir si le point G appartient ou non à Δ, on cherche s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_{\mathrm{G}} = 1+2t \\ y_{\mathrm{G}} = -2+t \\ z_{\mathrm{G}} = 4-t \end{cases}$.

Ce système s'écrit aussi $\begin{cases} -3 = 1+2t \\ -4 = -2+t \\ 6 = 4-t \end{cases}$ et est équivalent à $\begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$.

Ce système admet une unique solution (– 2) donc $\mathrm{G} \in \Delta$.

2°) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\vec{v}$ sont coplanaires.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(1\,;1\,;-2)$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(-1\,;1\,;0)$

On observe aisément que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires.

On va démontrer que $\vec{v}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

On utilise la propriété suivante :

> Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.
> $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires ⇔ $\vec{w}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On va chercher à savoir si le vecteur $\vec{w}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Cherchons s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{v} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $\quad (\mathrm{E})$.

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \alpha - \beta & (1) \\ -2 = \alpha + \beta & (2) \\ 3 = -2\alpha & (3) \end{cases} \quad \text{(traduction en coordonnées de l'égalité vectorielle)}$$

$$\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{3}{2} \\ \beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On vérifie aisément que le couple $\left(-\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ est solution de (1).

Le système admet donc le couple $\left(-\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ pour unique solution.

On peut donc écrire $\vec{v} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Autre méthode (plus rapide) :

On observe aisément que $\overrightarrow{AC} = -2\vec{v} - 3\overrightarrow{AB}$.

Cette égalité montre que $\overrightarrow{AC}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$, ce qui permet d'en déduire que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\vec{v}$ sont coplanaires.

Autre méthode :

On utilise un déterminant 3×3 à l'aide de la calculatrice.

3°) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ', parallèle à (AB) passant par C.

$\Delta' \,//\, (AB)$ donc $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de Δ'.

C a pour coordonnées $(0\,;1\,;2)$ et $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1\,;1\,;-2)$.

Δ' admet pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

4°) Quelles sont les coordonnées du point H tel que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$?

Comme O est l'origine du repère, les coordonnées du point H sont les mêmes que celles du vecteur $\overrightarrow{OH}$.

$$\begin{cases} x_H - x_O = 3x_{\overrightarrow{OA}} - x_{\overrightarrow{OB}} - x_{\overrightarrow{OC}} = 3 - 2 - 0 = 1 \\ y_H - y_O = 3y_{\overrightarrow{OA}} - y_{\overrightarrow{OB}} - y_{\overrightarrow{OC}} = 0 - 1 - 1 = -2 \\ z_H - z_O = 3z_{\overrightarrow{OA}} - z_{\overrightarrow{OB}} - z_{\overrightarrow{OC}} = 3 \times 2 - 0 - 2 = 4 \end{cases}$$

$H(1\,;-2\,;4)$

5°) On note Δ'' la droite définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Elle est parallèle à l'une des droites suivantes. Préciser laquelle.

(AB) $\qquad$ (CD) $\qquad$ (BC) $\qquad$ (BD)

Δ'' admet le vecteur $\overrightarrow{w'}\,(1\,;3\,;-4)$.

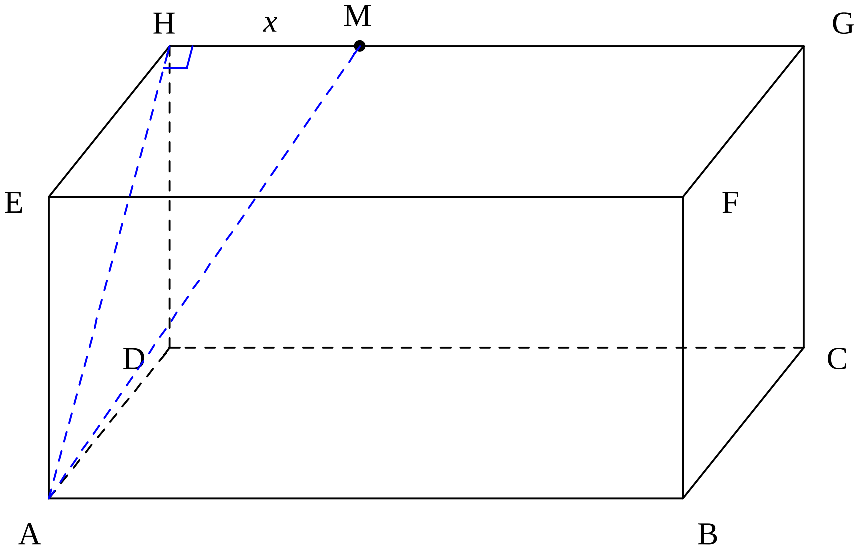
$\overrightarrow{AB}\,(1\,;1\,;-2)$
$\overrightarrow{CD}\,(1\,;-3\,;2)$
$\overrightarrow{BC}\,(-2\,;0\,;2)$
$\overrightarrow{BD}\,(-1\,;-3\,;4)$

On remarque que $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{w'}$.

On en déduit que $\Delta'' \mathbin{//} (BD)$.

II.

Soit ABCDEFGH un pavé droit tel que $AB = 5$, $AD = 3$, $AE = 2$.
On note M le point du segment $[GH]$ tel que $HM = x$ où x est un réel quelconque de l'intervalle $[0 ; 5]$.



1°) Exprimer AM^2 en fonction de x.

On utilise le théorème de Pythagore.

On se place dans le rectangle ADHE.

$AH^2 = AD^2 + DH^2$ (longueur de la diagonale d'un rectangle)

$= 9 + 4$

$= 13$

$AM^2 = AH^2 + HM^2$ (dans le triangle AHM rectangle en H)

$= 13 + x^2$

2°) Calculer l'aire du triangle ABM.

Soit I le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB).

On démontre aisément que le quadrilatère AIMH est un rectangle.

Par conséquent, on a $MI = AH = \sqrt{13}$.

Pour calculer l'aire du triangle ABM, on prend $[AB]$ pour base (pas d'autre possibilité). La hauteur relative à cette base est alors le segment MI.

$$\mathcal{A}_{\text{ABM}} = \frac{\text{AB} \times \text{MI}}{2}$$ (formule en situation)

$$= \frac{5 \times \sqrt{13}}{2}$$

$$= \frac{5\sqrt{13}}{2}$$ (unité d'aire associée à l'unité de longueur considérée sous-entendue)

3°) Calculer le volume de la pyramide MABCD.

La pyramide MABCD a pour sommet M et pour base ABCD qui est un rectangle.

Soit V le volume de cette pyramide.

$$V = \frac{\mathcal{A}_{\text{ABCD}} \times \text{hauteur}}{3}$$

On doit chercher la hauteur de la pyramide. Il s'agit de la distance de M au plan défini par les points A, B, C, D.

Cette distance est égale à $\text{AE} = 2$.

On pourrait éventuellement considérer le projeté orthogonal de M sur la droite (CD).

$$V = \frac{5 \times 3 \times 2}{3}$$

$= 10$ (unité de volume correspondant à l'unité de longueur choisie)

III.

Soit A, B, C, D quatre points quelconques de l'espace. Soit α et β deux réels donnés.
On note I, J, K, L les points définis par $\overrightarrow{AI}=\alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ}=\alpha\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DK}=\beta\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DL}=\beta\overrightarrow{DC}$.

On peut faire une figure dans l'espace.

1°) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

On utilise les vecteurs (calcul vectoriel).

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$ (relation de Chasles)

$=\alpha\overrightarrow{BA}+\alpha\overrightarrow{AC}$

$=\alpha\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\alpha\overrightarrow{BC}$

2°) On suppose dans cette question que :

- α et β sont non nuls ;
- les points B et C sont distincts.

Quelle est la position relative des droites (IJ) et (KL) ? Justifier.

$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DL}$

$=\beta\overrightarrow{BD}+\beta\overrightarrow{DC}$

$=\beta\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\right)$

$=\beta\overrightarrow{BC}$

On reprend les égalités $\overrightarrow{IJ}=\alpha\overrightarrow{BC}$ (1) et $\overrightarrow{KL}=\beta\overrightarrow{BC}$ (2).

(1) montre que $(IJ)\ //\ (BC)$.
(2) montre que $(KL)\ //\ (BC)$.

Par transitivité de la relation de parallélisme, on a $(IJ)\ //\ (KL)$.