T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 9 décembre 2022

40 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (2 points)

On considère l'équation différentielle $y'=2y$ (E).

Déterminer la solution *f* de (E) telle que $f(-\ln 3)=-1$. …………………………………..

On attend uniquement l'expression sans détailler la démarche.

II. (2 points)

Déterminer le réel *x* tel que les nombres e^{x}, e^{2x+1}, e^{4x-1} soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

…. (une seule réponse sans égalité

III. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) Dans cette question, *n* désigne un entier naturel.

Compléter : $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ …. car ………… ; $4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ …. car …………

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=4^n+(-3)^n$ pour tout entier naturel *n*.

Vérifier au brouillon que $u_n=4^n\left[1+\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n\right]$ pour tout entier naturel *n*.

Compléter : $\left.\begin{array}{r} 4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dots\\ 1+\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dots \end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ ….

IV. (3 points : 1 point + 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n+2\sqrt{n}\sin n+1$ pour tout entier naturel *n*.

Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a $u_n \geqslant \left(\sqrt{n}-1\right)^2$; en déduire la limite de (u_n).

………

………

………

V. (2 points)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que $v_n < 0$ pour tout entier naturel n, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Compléter : $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ldots.$ $\qquad$ ${u_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ldots.$

VI. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 10$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ pour tout entier naturel n. On admet que (u_n) converge.
En utilisant la touche $\boxed{\text{Ans}}$ de la calculatrice, compléter les phrases suivantes.

- On peut conjecturer que (u_n) est …………………………………… . (sens de variation)

- On peut conjecturer que (u_n) converge vers ….. .

- Le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant 3{,}01$ est …. .

VII. (2 points)

On admet que $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et que $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (n est un entier naturel).

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leqslant 2u_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$ pour tout entier naturel n non nul.

Compléter la phrase suivante : D'après ……………………………………………., $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ldots\ldots$

VIII. (1 point)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $(u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ell$ où ℓ est un réel non nul.

Quelle est la valeur de ℓ ? …..

IX. (2 points)

Dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites D et D' qui admettent les systèmes d'équations paramétriques suivants :

$$D \begin{cases} x = t+3 \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad\qquad D' \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de D et D'.
Vérifier en traçant les deux droites sur la calculatrice.

…………………

Corrigé de l'interrogation écrite du 9 -12-2022

Dans les exercices **III** à **VIII.**, la lettre *n* désigne un entier naturel.

I.

On considère l'équation différentielle $y' = 2y \quad (\mathrm{E})$.
Déterminer la solution *f* de (E) telle que $f(-\ln 3) = -1$. $\qquad f(x) = -9\mathrm{e}^{2x}$

On attend uniquement l'expression sans détailler la démarche.

(E) est une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = 2$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{2x} \quad (k \in \mathbb{R})$.

On cherche *k* tel que $f(-\ln 3) = -1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow k \times \mathrm{e}^{-2\ln 3} = -1$

$\Leftrightarrow k \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\ln 3}} = -1$

$\Leftrightarrow k \times \dfrac{1}{\left(\mathrm{e}^{\ln 3}\right)^2} = -1$

$\Leftrightarrow k \times \dfrac{1}{3^2} = -1$

$\Leftrightarrow k \times \dfrac{1}{9} = -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{k}{9} = -1$ (ligne facultative)

$\Leftrightarrow k = -1 \times 9$ (ligne facultative)

$\Leftrightarrow k = -9$

La solution cherchée est la fonction $f : x \mapsto -9\mathrm{e}^{2x}$.

II.

Déterminer le réel x tel que les nombres e^x, e^{2x+1}, e^{4x-1} soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

3 (une seule réponse sans égalité

Pour que les nombres e^x, e^{2x+1}, e^{4x-1} soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique, il faut et il suffit que $\frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^{4x-1}}{\mathrm{e}^{2x+1}}$ (1).

1ère méthode :

On simplifie les deux quotients $\frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^x}$ et $\frac{\mathrm{e}^{4x-1}}{\mathrm{e}^{2x+1}}$.

$$\frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^{2x+1-x}=\mathrm{e}^{x+1}$$
$$\frac{\mathrm{e}^{4x-1}}{\mathrm{e}^{2x+1}}=\mathrm{e}^{4x-1-2x-1}=\mathrm{e}^{2x-2}$$

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+1}=\mathrm{e}^{2x-2}$

$\Leftrightarrow x+1=2x-2$

$\Leftrightarrow x=3$

2e méthode :

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x+1}\times\mathrm{e}^{2x+1}=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{4x-1}$ (produit en croix)

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{4x+2}=\mathrm{e}^{5x-1}$

$\Leftrightarrow 4x+2=5x-1$

$\Leftrightarrow x=3$

Complément :

Pour $x=3$, les nombres sont e^3, e^7, e^{11}. On vérifie aisément que dans cet ordre, ils sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison e^4.

Comme les nombres e^x, e^{2x+1}, e^{4x-1} sont non nuls, on pourrait utiliser directement la propriété suivante :

Soit a, b, c trois réels non nuls.

a, b, c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2=ac$.

On peut parler de progression géométrique.

III.

1°) Dans cette question, n désigne un entier naturel.

Compléter : $\left(-\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $-1<-\frac{3}{4}<1$; $4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car $4>1$.

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=4^n+(-3)^n$ pour tout entier naturel n.

Vérifier au brouillon que $u_n=4^n\left[1+\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]$ pour tout entier naturel n.

Compléter : $\left.\begin{array}{r} 4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ 1+\left(-\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n+2\sqrt{n}\sin n+1$ pour tout entier naturel n.

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \left(\sqrt{n}-1\right)^2$; en déduire la limite de (u_n).

① On procède par inégalités successives.

On sait que $\forall n\in\mathbb{N}\quad \sin n \geqslant -1$.

On multiplie les deux membres de l'inégalité précédente par $2\sqrt{n}$ qui est un réel positif ou nul.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad 2\sqrt{n}\sin n \geqslant -2\sqrt{n}$ (le sens de l'inégalité est conservé)

On peut ajouter $n+1$ aux deux membres de l'inégalité précédente.

On obtient $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n \geqslant n+1-2\sqrt{n}$ soit $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n \geqslant \left(\sqrt{n}-1\right)^2$ (1) (car $\left(\sqrt{n}-1\right)^2=n+1-2\sqrt{n}$).

② On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}-1\right)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}-1\right)^2=+\infty$ (2).

D'après (1) et (2), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ grâce à l'extension du théorème des gendarmes.

On n'a pas besoin de majorer u_n.

V.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que $v_n < 0$ pour tout entier naturel *n*, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Compléter : $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ $\quad$ ${u_n}^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 4$

On sait par hypothèse que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n < 0$.

On peut donc écrire $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0^-$.

Par limite d'un quotient, compte tenu de $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0^-$, on obtient $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

VI.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 10$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ pour tout entier naturel *n*. On admet que (u_n) converge.
En utilisant la touche $\boxed{\text{Ans}}$ de la calculatrice, compléter les phrases suivantes.

● On peut conjecturer que (u_n) est strictement décroissante. (sens de variation)

● On peut conjecturer que (u_n) converge vers 3.

● Le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n \leqslant 3,01$ est 4.

VII.

On admet que $e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et que $e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (n est un entier naturel).

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $e^{-\frac{1}{n}} \leqslant 2u_n \leqslant e^{\frac{1}{n}}$ pour tout entier naturel n non nul.

Compléter la phrase suivante : D'après le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

1ère méthode :

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e^{-\frac{1}{n}} \leqslant 2u_n \leqslant e^{\frac{1}{n}}$, $e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

D'après le théorème des gendarmes, $2u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ car $u_n = \frac{1}{2} \times 2u_n$.

2e méthode :

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e^{-\frac{1}{n}} \leqslant 2u_n \leqslant e^{\frac{1}{n}}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}e^{\frac{1}{n}}$.

On sait que $e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et que $e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ et que $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

D'après le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

VIII.

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $(u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ell$ où ℓ est un réel non nul.

Quelle est la valeur de ℓ ? 2

On sait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $(u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^2$.

On sait également que $(u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ell$.

Par unicité de la limite d'une suite, on a $\ell^2 = 2\ell \quad (1)$.

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell = 0 \\
&\Leftrightarrow \ell(\ell - 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = 2
\end{aligned}
$$

Comme $\ell \neq 0$, la seule valeur possible de ℓ est 2.

IX.

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les droites D et D' qui admettent les systèmes d'équations paramétriques suivants :

$$D \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t \end{cases} \quad \left(t \in \mathbb{R}\right) \qquad\qquad D' \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad \left(t \in \mathbb{R}\right).$$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de D et D'.
Vérifier en traçant les deux droites sur la calculatrice.

$$\mathrm{I}\left(0\,;3\right)$$

Pour D', on change le nom du paramètre : $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 1 - t' \end{cases} \quad \left(t' \in \mathbb{R}\right)$

On doit résoudre le système $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = t \\ x = 1 + 2t' \\ y = 1 - t' \end{cases}$.

On peut utiliser la calculatrice pour résoudre le système.

Pour une résolution par le calcul, on doit résoudre le système $\begin{cases} t + 3 = 1 + 2t' \\ t = 1 - t' \end{cases}$.
Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.
On peut le résoudre de diverses manières.
On peut par exemple le résoudre par substitution en remplaçant t par son expression en fonction de t' dans la première équation.

On obtient $1 - t' + 3 = 1 + 2t'$, ce qui donne immédiatement $t' = 1$.

La deuxième équation donne alors $t = 0$.

Les coordonnées de I s'obtiennent en remplaçant t ou t' par leurs valeurs.