T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 2 décembre 2022

40 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (2 points)

On considère l'équation différentielle $y' = -4y \quad (\mathrm{E})$. Compléter la phrase suivante :

Les solutions de (E) sont les fonctions ……………………………………………………………………………..

………..

II. (2 points)

Déterminer le réel *x* tel que la moyenne géométrique de e^{x-2} et de e^{x} soit égale à 3.

………. (écrire un seul résultat sans égalité)

III. (2 points)

Écrire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\log x < 3$.

………. (répondre sans égalité)

IV. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = (-1)^n \times n!$ pour tout entier naturel *n*.

Exprimer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour *n* entier naturel quelconque sous la forme la plus simple possible.

……………..…….. (écrire une seule égalité)

V. (6 points : 1°) 5 points : 2 points + 3 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + 1}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Le but de cette question est de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a $u_n = \sqrt{n}$.

Pour *n* entier naturel quelconque, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = \sqrt{n}$ ».

• Commençons par démontrer que la phrase $P(0)$ est vraie.

D'une part, on a $u_0 = \ldots$ par définition de la suite (u_n). D'autre part, on a $\sqrt{\ldots\ldots} = \ldots.$

On peut donc écrire $u_0 = \ldots\ldots$, ce qui permet d'affirmer que la phrase $P(0)$ est vraie.

• Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k = \sqrt{k}$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} =$ …………………..

On sait que $u_{k+1} = \sqrt{{u_k}^2 + 1}$ par la relation de récurrence qui définit la suite (u_n).
On sait par ailleurs que $u_k = \sqrt{k}$ par hypothèse de récurrence.
On peut alors exprimer u_{k+1} en fonction de k : $u_{k+1} =$ …………..

$=$ …………..

La phrase $P(k+1)$ est donc vraie.

Conclusion : ………………………..…………………………………………………………………………..

………..

2°) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au millième de $S = \sum_{k=0}^{k=100} u_k$. ……..…

VI. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

On considère un pavé droit ABCDEFGH. Soit I un point quelconque appartenant au segment $[\mathrm{AE}]$, distinct de A et de E. La droite (HI) coupe la droite (AD) en un point J. On répondra par oui ou non aux questions 2°), 3°), 4°).

1°) Compléter l'égalité : $(\mathrm{BIH}) \cap (\mathrm{ABC}) =$ ....

2°) Les points B, G, H, I sont-ils coplanaires ? …..

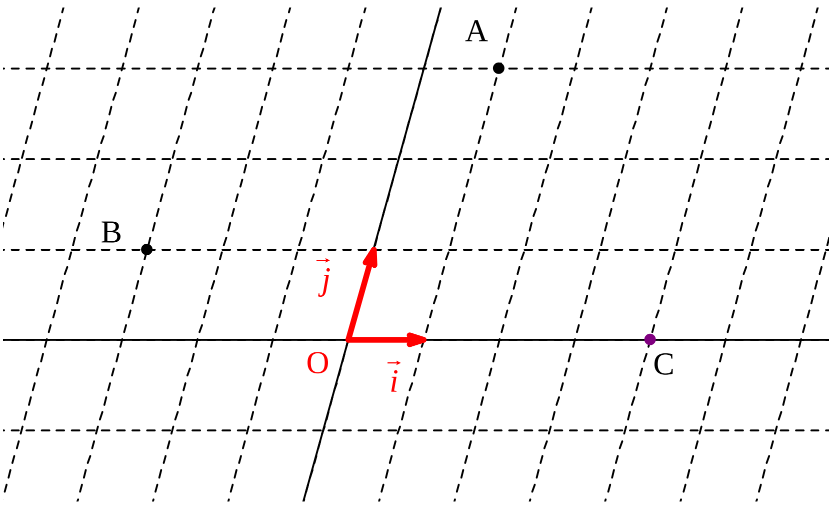
3°) La droite (BD) est-elle parallèle au plan (AFH) ? …..

4°) Les points A, B, C, J sont-ils coplanaires ? …..

VII. (2 points)

On considère le graphique ci-dessous sur lequel on a placé trois points A, B, C dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Écrire sans justifier un système d'équations paramétriques de la droite *D*, parallèle à la droite (AB) passant par C.



Corrigé de l'interrogation écrite du 2-12-2022

I.

On considère l'équation différentielle $y'=-4y \quad (\mathrm{E})$. Compléter la phrase suivante :

Les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{-4x}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

On applique le théorème fondamental pour les équations différentielles de la forme $y'=ay$ où *a* est un réel.

II.

Déterminer le réel *x* tel que la moyenne géométrique de e^{x-2} et de e^{x} soit égale à 3.

$\ln 3+1$ (écrire un seul résultat sans égalité)

Soit *m* la moyenne géométrique de e^{x-2} et de e^{x}.

$$m=\sqrt{\mathrm{e}^{x-2}\times\mathrm{e}^{x}}$$

$$=\sqrt{\mathrm{e}^{2x-2}}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{2x-2}{2}}$$

$$=\mathrm{e}^{x-1}$$

On pourrait écrire $\sqrt{\mathrm{e}^{2x-2}}=\left(\mathrm{e}^{2x-2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

On cherche *x* tel que $m=3$ soit $\mathrm{e}^{x-1}=3 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow x-1=\ln 3$$

$$\Leftrightarrow x=\ln 3+1$$

On pourrait écrire $\ln 3+1=\ln(3\mathrm{e})$. Cette écriture n'a pas d'intérêt ici.

III.

Écrire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\log x<3$.

$]0\,;1000[$ (répondre sans égalité)

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\log x < 3 \quad (1)$.

On doit avoir $x > 0$. On résout l'inéquation (1) dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1ère méthode :

On utilise l'équivalence fondamentale concernant les inégalités entre deux logarithmes de base 10.

$$(1) \Leftrightarrow \log x < \log\left(10^3\right)$$
$$\Leftrightarrow x < 10^3$$

On tient compte de la condition $x > 0$.

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S =]0\,;1000[$

2e méthode :

On repasse par la définition du logarithme de base 10 à l'aide du logarithme népérien.

Cette méthode est à éviter.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = (-1)^n \times n!$ pour tout entier naturel n.

Exprimer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour n entier naturel quelconque sous la forme la plus simple possible.

$-n-1$ (écrire une seule égalité)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+1} \times (n+1)!}{(-1)^n \times n!}$$

$$= \frac{\cancel{(-1)^n} \times (-1) \times (n+1) \times \cancel{n!}}{\cancel{(-1)^n} \times \cancel{n!}}$$

$$= (-1) \times (n+1)$$

$$= -(n+1)$$

$$= -n-1$$

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + 1}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Le but de cette question est de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a $u_n = \sqrt{n}$.
Pour *n* entier naturel quelconque, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = \sqrt{n}$ ».

• Commençons par démontrer que la phrase $P(0)$ est vraie.
D'une part, on a $u_0 = 0$ par définition de la suite (u_n). D'autre part, on a $\sqrt{0} = 0$.
On peut donc écrire $u_0 = \sqrt{0}$, ce qui permet d'affirmer que la phrase $P(0)$ est vraie.

• Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k = \sqrt{k}$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} = \sqrt{k+1}$.

On sait que $u_{k+1} = \sqrt{{u_k}^2 + 1}$ par la relation de récurrence qui définit la suite (u_n).
On sait par ailleurs que $u_k = \sqrt{k}$ par hypothèse de récurrence.
On peut alors exprimer u_{k+1} en fonction de *k* :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \sqrt{\left(\sqrt{k}\right)^2 + 1} \\ &= \sqrt{k+1} \end{aligned}$$

La phrase $P(k+1)$ est donc vraie.

Conclusion : On a démontré que la phrase $P(0)$ est vraie et que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors la phrase $P(k+1)$ est également vraie.
D'après le théorème de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

2°) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au millième de $S = \sum_{k=0}^{k=100} u_k$. 671,463

On écrit $S = \sum_{k=0}^{k=100} \sqrt{k}$.

La commande « somme » de la calculatrice Numworks s'obtient dans la boîte à outils, rubrique Analyse.

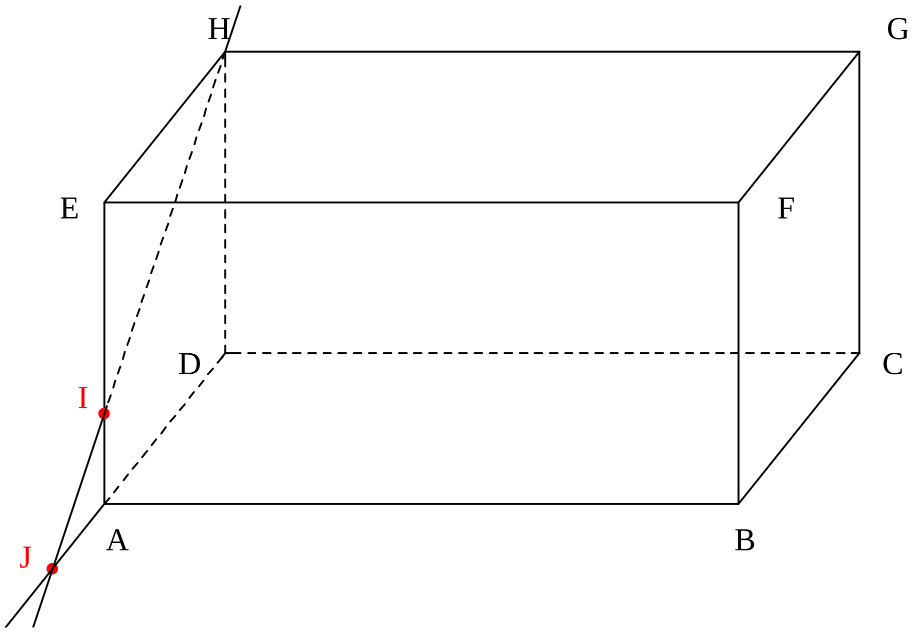
On doit écrire la somme sous la forme $\sum_{\mathrm{K}=0}^{100} \sqrt{\mathrm{K}}$.

On obtient l'affichage 671,4629.

La valeur arrondie au millième de *S* est donc 671,463.

VI.

On considère un pavé droit ABCDEFGH. Soit I un point quelconque appartenant au segment $[\text{AE}]$, distinct de A et de E. La droite (HI) coupe la droite (AD) en un point J. On répondra par oui ou non aux questions 2°), 3°), 4°).



1°) Compléter l'égalité : $(\text{BIH}) \cap (\text{ABC}) = (\text{BJ})$

On sait que l'intersection de deux plans sécants est une droite.

Le point B est un point commun aux plans (BIH) et (ABC).

$\text{J} \in (\text{IH})$ de manière évidente.
Or $(\text{IH}) \subset (\text{BIH})$.
Donc $\text{J} \in (\text{BIH})$.

$\text{J} \in (\text{AD})$ de manière évidente.
Or $(\text{AD}) \subset (\text{ABC})$.
Donc $\text{J} \in (\text{ABC})$.

Les points B et J appartiennent tous les deux aux plans (BIH) et (ABC).
De plus, ils ne sont pas confondus (démonstration facile).
Donc (BIH) et (ABC) sont sécants selon la droite (BJ).

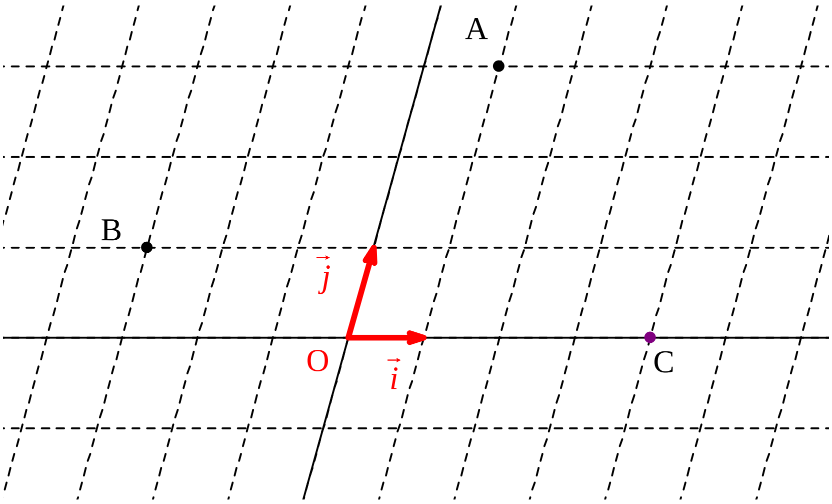
2°) Les points B, G, H, I sont-ils coplanaires ? non
3°) La droite (BD) est-elle parallèle au plan (AFH) ? oui
4°) Les points A, B, C, J sont-ils coplanaires ? oui

3°) On a $(\text{BD}) \,//\, (\text{FH})$.
De plus, $(\text{FH}) \subset (\text{AFH})$.
Or si une droite est parallèle à une droite à un plan, alors elle est parallèle à ce plan (théorème du cours).
On en déduit que $(\text{BD}) \,//\, (\text{AFH})$.

VII.

On considère le graphique ci-dessous sur lequel on a placé trois points A, B, C dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Écrire sans justifier un système d'équations paramétriques de la droite *D*, parallèle à la droite (AB) passant par C.



$\text{A}\left|\begin{array}{l}1\\3\end{array}\right.$ $\qquad$ $\text{B}\left|\begin{array}{l}-3\\1\end{array}\right.$ $\qquad$ $\text{C}\left|\begin{array}{l}4\\0\end{array}\right.$

$\overrightarrow{\text{AB}}\left|\begin{array}{l}-4\\-2\end{array}\right.$ (on peut lire ces coordonnées sur le graphique)

Comme $D \,//\, (\text{AB})$, *D* admet le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ pour vecteur directeur.

On peut donc prendre $\left(\text{C}, \overrightarrow{\text{AB}}\right)$ pour repère de *D*.

On peut appliquer directement le résultat du cours ou refaire toute la démarche.

> Soit $\text{A}\left(x_\text{A}\,;\,y_\text{A}\right)$ un point et $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta)$ un vecteur non nul.
> Un système d'équations paramétriques de la droite *D* passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'écrit
> $\begin{cases} x = x_\text{A} + t\alpha \\ y = y_\text{A} + t\beta \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Avec ce repère, la propriété fournit le système d'équations paramétriques suivant de *D* : $\begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = -2t \end{cases}$ $\quad (t \in \mathbb{R})$.

On peut aussi prendre $\left(\text{C}, \overrightarrow{\text{BA}}\right)$ comme repère de *D*.

Avec ce repère, la propriété fournit le système d'équations paramétriques suivant de *D* : $\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 2t \end{cases}$ $\quad (t \in \mathbb{R})$.

On peut aussi considérer le vecteur $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{BA}}$.

$\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de D.

$\vec{u}\left|\begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array}\right.$

Avec le repère $\left(\text{C}, \vec{u}\right)$, la propriété fournit le système d'équations paramétriques suivant de D : $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = t \end{cases} \quad \left(t \in \mathbb{R}\right)$.

On peut utiliser une écriture matricielle : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.