T exp

Interrogation écrite du jeudi 24 novembre 2022 (30 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

Soit ABCD un rectangle du plan dont l'aire est de 45 cm^2 et dont le format est un nombre décimal non entier.
Déterminer toutes les dimensions possibles de ABCD en cm sachant que ce sont des entiers naturels.
On donnera le(s) résultat(s) sous la forme de couple(s) $(\text{longueur}\,;\,\text{largeur})$.

…………

II. (4 points : 2 points + 2°) 2 points)

On pose $E = [\![1\,;\,3]\!]$. On note A et B les matrices carrées d'ordre 3 définies par leurs coefficients $a_{i,\,j}$ et $b_{i,\,j}$ pour $(i\,;\,j) \in E^2$ de la manière suivante : $a_{i,\,j} = |\,i - j\,|$; $b_{i,\,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i > j \\ 1 \text{ si } i \leqslant j \end{cases}$. Écrire les matrices A et B.

III. (2 points)

Écrire sans justifier la matrice A carrée d'ordre 2 telle que pour tout couple $(x\,;\,y)$ de réels on ait $\text{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ y-x \end{pmatrix}$.

IV. (4 points : 1 point + 1 point + 2 points)

On considère la matrice $\text{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ où x et y sont deux réels quelconques.

- Calculer le déterminant de A en fonction de x et y. ……………………………………………………………

- On suppose que $(x\,;\,y) \neq (0\,;\,0)$. Justifier que A est inversible et écrire son inverse.

………………………………………………………………………………………………………

V. (2 points)

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ et $X_0=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$. Calculer $X_1=AX_0$ et $X_2=AX_1$.
Écrire dans chaque cas le détail du calcul puis vérifier les résultats à l'aide la calculatrice.

VI. (2 points)

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ où *a* est un réel quelconque. Calculer $B=2A-A^2$. On détaillera les calculs.

VII. (2 points)

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0=1+2\mathrm{i}$ et par la relation de récurrence $z_{n+1}=z_n{}^2-4\overline{z_n}$ pour tout entier naturel *n*.

On considère la fonction Python `terme(n)` dans l'encadré ci-dessous qui renvoie la valeur de z_n pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

```
def terme(n):
    z=1+2j
    for k in range …….. :

        z=z*z-4*z.conjugate()

    return ….
```

Compléter les deux instructions manquantes (pointillés au niveau du `for` et du `return`).

VIII. (2 points)

Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$.
Sur un petit graphique ci-contre, hachurer l'ensemble *E* des points M de *P*,
d'affixe *z*, tels que $\mathrm{Im}(z^2)\geqslant 0$.

Corrigé de l'interrogation écrite du 24-11-2022

I.

Soit ABCD un rectangle du plan dont l'aire est de $45\ \text{cm}^2$ et dont le format est un nombre décimal non entier.
Déterminer toutes les dimensions possibles de ABCD en cm sachant que ce sont des entiers naturels.
On donnera le(s) résultat(s) sous la forme de couple(s) $(\text{longueur}\,;\,\text{largeur})$.

$$(9\,;5)$$

Le format d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est le quotient $r=\dfrac{\text{L}}{\ell}$.

On peut éventuellement faire une figure.

On cherche tous les couples $(\text{L}\,;\,\ell)$ d'entiers naturels tels que $\text{L}\times\ell=45$ et $\dfrac{\text{L}}{\ell}$ soit un nombre décimal.

On fait une recherche systématique.

Les couples $(\text{longueur}\,;\,\text{largeur})$ possibles pour ABCD sont $(45\,;1)$, $(15\,;3)$, $(9\,;5)$ (il s'agit en fait chaque fois de diviseurs associés positifs de 45).

On retient seulement le couple $(9\,;5)$ car $\dfrac{9}{5}=2,2$ qui est un nombre décimal non entier.

II.

On pose $E=[\![1\,;3]\!]$. On note A et B les matrices carrées d'ordre 3 définies par leurs coefficients $a_{i,\,j}$ et $b_{i,\,j}$ pour $(i\,;\,j)\in E^2$ de la manière suivante : $a_{i,\,j}=|\,i-j\,|$; $b_{i,\,j}=\begin{cases}0 \text{ si } i>j\\ 1 \text{ si } i\leqslant j\end{cases}$. Écrire les matrices A et B.

$$\text{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix} \qquad \text{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Le i correspond au numéro de la ligne ; le j correspond au numéro de la colonne.

Pour la matrice A, on calcule les termes un à un en utilisant la formule de définition $a_{i,j} = |i-j|$.

$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{13} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ $a_{i,j} = \|i-j\|$	$a_{1,1} = \|1-1\| = 0$ $a_{1,2} = \|1-2\| = 1$ $a_{1,3} = \|1-3\| = 2$ $a_{2,1} = \|2-1\| = 1$ $a_{2,2} = \|2-2\| = 0$ $a_{2,3} = \|2-3\| = 1$ $a_{3,1} = \|3-1\| = 2$ $a_{3,2} = \|3-2\| = 1$ $a_{3,3} = \|3-3\| = 0$

Il faut bien faire attention à la valeur absolue.

Tous les coefficients diagonaux de A sont nuls.
La matrice A est symétrique : $\forall (i\,;\,j) \in E^2 \quad a_{i,j} = a_{j,i}$.

$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{13} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$ $b_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i > j \\ 1 \text{ si } i \leqslant j \end{cases}$	Pour B, il n'y a pas de calculs à effectuer. $1 \leqslant 1$ donc $b_{1,1} = 1$. $1 \leqslant 2$ donc $b_{1,2} = 1$. $1 \leqslant 3$ donc $b_{1,3} = 1$. $2 > 1$ donc $b_{2,1} = 0$. $2 \leqslant 2$ donc $b_{2,2} = 1$. $2 \leqslant 3$ donc $b_{2,3} = 1$. $3 > 1$ donc $b_{3,1} = 0$. $3 > 2$ donc $b_{3,2} = 0$. $3 \leqslant 3$ donc $b_{3,3} = 1$.

La matrice B est triangulaire inférieure.

III.

Écrire sans justifier la matrice A carrée d'ordre 2 telle que
pour tout couple $(x\,;\,y)$ de réels on ait $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ y-x \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément en effectuant le calcul : $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ y-x \end{pmatrix}$.

Une autre démarche consiste à poser $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont quatre réels.

On a $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$.

On procède ensuite par identification.

IV.

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ où x et y sont deux réels quelconques.

• Calculer le déterminant de A en fonction de x et y.

$$\det A=\begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix}$$

$$=x\times x-y\times(-y)$$

$$=x^2+y^2$$

• On suppose que $(x\,;y)\neq(0\,;0)$. Justifier que A est inversible et écrire son inverse.

On a $x^2+y^2\geqslant 0$ de manière évidente.

Or par hypothèse, on a $(x\,;y)\neq(0\,;0)$. Cela signifie que $x\neq 0$ $\boxed{\text{ou}}$ $y\neq 0$ ce que l'on peut exprimer en français en disant que x et y ne sont pas tous les deux nuls.

En effet, d'après le principe d'égalité de deux couples, on a :

$$(x\,;y)=(0\,;0)\ \Leftrightarrow\ x=0\ \boxed{\text{et}}\ y=0$$

Donc, par négation, on a :

$$(x\,;y)\neq(0\,;0)\ \Leftrightarrow\ x\neq 0\ \boxed{\text{ou}}\ y\neq 0$$

On en déduit que $x^2+y^2>0$.

On a $\det A>0$ d'où $\det A\neq 0$ ce qui permet d'affirmer que A est inversible.

$$\boxed{\text{On peut écrire } \forall(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0\,;0)\}\quad \det A>0.}$$

Par la formule du cours, on peut écrire $A^{-1}=\dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

V.

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ et $X_0=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$. Calculer $X_1=AX_0$ et $X_2=AX_1$.

Écrire dans chaque cas le détail du calcul puis vérifier les résultats à l'aide la calculatrice.

$X_1=AX_0$

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3+4\\ 3-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7\\ 1\end{pmatrix}$

$X_2=AX_1$

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7+2\\ 7-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9\\ 6\end{pmatrix}$

On vérifie les deux résultats à l'aide la calculatrice.

VI.

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque. Calculer $B=2A-A^2$. On détaillera les calculs.

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} &= 2\mathrm{A} - \mathrm{A}^2 \\
&= 2\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \\
&= 2\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On obtient la matrice identité d'ordre 2.

On peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice en utilisant l'astuce qui consiste à remplacer a par π ou e.

VII.

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0 = 1 + 2\mathrm{i}$ et par la relation de récurrence $z_{n+1} = {z_n}^2 - 4\overline{z_n}$ pour tout entier naturel n.

On considère la fonction Python `terme(n)` dans l'encadré ci-dessous qui renvoie la valeur de z_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

```
def terme(n):
    z=1+2j
    for k in range (1,n+1): ou for k in range(n):
        z=z*z-4*z.conjugate()
    return z
```

Compléter les deux instructions manquantes (pointillés au niveau du `for` et du `return`).

On peut remplacer la variable de boucle k par un tiret du bas _ (sans donner de nom), ce qui évite d'introduire une variable sans véritable utilité.

k peut être remplacé par n'importe quelle lettre autre que n, z, j.

Il faut faire parcourir à k un ensemble de n entiers consécutifs : ce peut être $[\![1 ; n]\!]$ (qui correspond à `range(1,n+1)`) ou $[\![0 ; n-1]\!]$ (qui correspond à `range(0,n)` qu'on note également de manière plus simple `range(n)`).

VIII.

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Sur un petit graphique ci-contre, hachurer l'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que $\mathrm{Im}\left(z^2\right) \geqslant 0$.

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

On va déterminer $\mathrm{Im}\left(z^2\right)$ en fonction de x et de y.

Pour cela, on va chercher la forme algébrique de z^2.

$$z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2$$

$$= x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$$

Cette dernière égalité donne la forme algébrique de z^2 et permet d'en déduire que $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = x^2 - y^2$ et que $\mathrm{Im}\left(z^2\right) = 2xy$.

$$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow \mathrm{Im}\left(z^2\right) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 2xy \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow xy \geqslant 0 \quad \text{(signifie que } x \text{ et } y \text{ de même signe)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \boxed{\text{ou}} \begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{(il s'agit d'une équivalence fondamentale)}$$

E est la réunion de deux quadrants (premier et troisième quadrant).