T spécialité

Devoir facultatif pour le lundi 14 novembre 2022

Soit a un réel fixé.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = a$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n - 1}$ pour tout entier naturel n tel que $u_n \neq 1$.

Le but de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de a cette suite est finie, c'est-à-dire qu'il existe un indice k tel que $u_k = 1$. La suite est alors finie de longueur $k+1$.

De manière évidente, si $a = 1$, alors la suite est de longueur 1 puisque u_1 n'est pas calculable.

1°) Déterminer la valeur de a pour laquelle (u_n) est de longueur 2.

2°) Quelle est la nature de (u_n) si $a = 0$ ou $a = 3$? Justifier la réponse.

3°) On suppose désormais que $a \neq 3$.

Démontrer que pour tout entier naturel n pour lequel u_n existe on a : $u_n \neq 3$.

On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n tel que u_n existe par la relation $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 3}$.

a) Démontrer que si a est différent de 1, (v_n) est alors une suite géométrique dont on donnera le terme général en fonction de a.

b) Exprimer alors u_n en fonction de n et de a.

c) Résoudre l'équation $u_n = 1$ d'inconnue a et conclure.

d) Déterminer alors la valeur de a pour que (u_n) soit de longueur 5.

Corrigé du devoir pour le 14-11-2022

1°)

(u_n) est de longueur 2 si et seulement si $a \neq 1$ et $u_1 = 1$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{2a}{a-1} = 1$

$\Leftrightarrow 2a = a - 1$

$\Leftrightarrow a = -1$

2°)

• Si $a = 0$, alors $u_1 = \dfrac{2u_0}{u_0 - 1} = \dfrac{2 \times 0}{0 - 1} = 0$ d'où $u_0 = u_1 = 0$.

La suite (u_n) est donc constante de valeur 0 (tous les termes de la suite sont égaux à 0).
On démontre ce résultat par récurrence.

• Si $a = 3$, alors $u_1 = \dfrac{2 \times u_0}{u_0 - 1} = \dfrac{2 \times 3}{3 - 1} = 3$ d'où $u_0 = u_1 = 3$.

La suite (u_n) est donc constante de valeur 3 (tous les termes de la suite sont égaux à 3).
On démontre ce résultat par récurrence.

3°) On suppose que $a \neq 3$.
En effet, supposons que l'ensemble des entiers naturels *n* tels que $u_n = 3$ soit non vide. Alors cet ensemble admet un plus petit élément *p*. On a $p \geqslant 1$ car $u_0 \neq 3$ par hypothèse.

D'où $u_p = \dfrac{2u_{p-1}}{u_{p-1} - 1}$ soit $\dfrac{2u_{p-1}}{u_{p-1} - 1} = 3$ ce qui donne $2u_{p-1} = 3u_{p-1} - 3$ soit $u_{p-1} = 3$ ce qui contredirait la maximalité de *p*.

Donc pour tout entier naturel *n* tel que u_n existe, on a $u_n \neq 3$.

a) On suppose que a est un réel différent de 1.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 3}$$

$$= \frac{\dfrac{2u_n}{u_n - 1}}{\dfrac{2u_n}{u_n - 1} - 3}$$

$$= \frac{\dfrac{2u_n}{u_n - 1}}{\dfrac{2u_n - 3(u_n - 1)}{u_n - 1}}$$

$$= \frac{\dfrac{2u_n}{u_n - 1}}{\dfrac{2u_n - 3u_n + 3}{u_n - 1}}$$

$$= \frac{\dfrac{2u_n}{u_n - 1}}{\dfrac{-u_n + 3}{u_n - 1}}$$

$$= \frac{2u_n}{3 - u_n}$$

$$= -2v_n$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = \dfrac{a}{a-3}$ et de raison – 2.

Pour tout entier naturel n tel que v_n existe, on a donc $v_n = \dfrac{a}{a-3} \times (-2)^n$.

b) Dans ce cas, on a alors $(u_n - 3)v_n = u_n$ d'où $u_n(v_n - 1) = 3v_n$ et comme $v_n \neq 1$, vu que $\dfrac{u_n}{u_n - 3} \neq 1$,

$$u_n = \frac{3v_n}{v_n - 1}$$

$$= \frac{3 \times \dfrac{a}{a-3} \times (-2)^n}{\dfrac{a}{a-3} \times (-2)^n - 1}$$

$$= \frac{3a \times (-2)^n}{a \times (-2)^n - a + 3}$$

c)

On cherche a tel que $u_1 = 1 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow 3a \times (-2)^n = a \times (-2)^n - a + 3$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{2 \times (-2)^n + 1}$$

Cette expression définit le premier terme de (u_n) de longueur $n+1$.

d) Pour $n = 4$, alors $a = \frac{1}{11}$, (u_n) est alors de longueur 5.