T exp

Interrogation écrite du jeudi 20 octobre 2022 (50 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère les sous-ensembles E et F de $\mathbb{N}$ ainsi définis : $x \in E \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \ / \ x = k^2$; $x \in F \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \ / \ x = k^4$.

Exemples : $25 \in E$ car $25 = 5^2$; $81 \in F$ car $81 = 3^4$.

1°) Quelle relation d'inclusion peut-on écrire entre E et F ?
Entourer la bonne réponse puis justifier rigoureusement sur les deux lignes en dessous.

$E \subset F$ $\qquad\qquad$ $F \subset E$

……

……

2°) Quel est le plus petit élément de E supérieur ou égal à 2022 ? Quel est le plus petit élément de F supérieur ou égal à 2022 ?

…………… $\qquad\qquad$ ……………

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit a, b, c, d quatre entiers relatifs tels que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. On pose $E = [\![a \,;\, b]\!]$ et $F = [\![c \,;\, d]\!]$.

On note A et B les sous ensembles de $\mathbb{Z}$ ainsi définis : $A = \{x + y, (x \,;\, y) \in E \times F\}$; $B = \{xy, (x \,;\, y) \in E \times F\}$.

1°) Sur la ligne ci-dessous, écrire A sous la forme d'un intervalle d'entiers avec doubles crochets et exprimer le cardinal de A en fonction de a, b, c, d.

…………………..… $\qquad\qquad$ ……………

2°) Dans cette question, on suppose a, b, c, d sont positifs ou nuls.
Exprimer le minimum et le maximum de B en fonction de a, b, c, d. …………… $\qquad\qquad$ ……………

III. (2 points)

Soit a et b deux réels non tous les deux nuls.

On pose $Z = \dfrac{4\mathrm{i}}{(a + \mathrm{i}b)(1 + \mathrm{i})^2}$.

Déterminer la forme algébrique de Z.
Écrire la réponse après calculs au brouillon dans l'espace ci-contre.

IV. (4 points : 2 points + 2 points)

Démontrer que pour tout entier relatif *n*, on a $(1+\mathrm{i})^{4n}=(-4)^{n}$.
En déduire que pour tout entier relatif *n*, $(1+\mathrm{i})^{4n+2}$ est un imaginaire pur.

………

………

………

………

………

………

V. (1 point)

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $z_0=1+\mathrm{i}$ et par la relation de récurrence $z_{n+1}=z_n{}^2+4$ pour tout entier naturel *n*.
À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que $\mathrm{Im}\, z_n<0$.

….. (une seule réponse sans égalité)

VI. (4 points : 2 points + 2 points)

Dans cet exercice, les deux équations ont pour inconnue $z\in\mathbb{C}$. On donnera les solutions sous forme algébrique.

Compléter les phrases suivantes :

- La solution de l'équation $\mathrm{i}\times\bar{z}+1=\overline{(2\mathrm{i}-1)z}$ est …………. .

- Les solutions de l'équation $z^3+2z^2+2z=0$ sont ……………………… .

VII. (1 point)

Dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$, on donne le vecteur $\vec{w}=2\vec{v}-\vec{u}$ et le point A d'affixe $3+3\mathrm{i}$.

Quelle est l'affixe du point B de *P* tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{w}$ (1) ?

………….. (une seule réponse sans égalité)

Corrigé de l'interrogation écrite du 20-10-2022

I.

On considère les sous-ensembles E et F de $\mathbb{N}$ ainsi définis : $x \in E \iff \exists k \in \mathbb{N} \ / \ x = k^2$; $x \in F \iff \exists k \in \mathbb{N} \ / \ x = k^4$.

Exemples : $25 \in E$ car $25 = 5^2$; $81 \in F$ car $81 = 3^4$.

• E est l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire comme carrés d'entiers naturels (carrés parfaits).

• F est l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire comme puissance 4 d'entiers naturels.

• On pourrait écrire E et F sous la forme paramétrée suivant : $E = \left\{k^2, k \in \mathbb{N}\right\}$; $F = \left\{k^4, k \in \mathbb{N}\right\}$.

1°) Quelle relation d'inclusion peut-on écrire entre E et F ?
Entourer la bonne réponse puis justifier rigoureusement sur les deux lignes en dessous.

$E \subset F$ $\qquad\qquad$ $F \subset E$

Pour démontrer que F est inclus dans E, on doit démontrer que tout élément de F appartient à E.

Soit x un élément quelconque de F.

Par définition de F, il existe un entier naturel k tel que $x = k^4$.

On peut écrire $x = \left(k^2\right)^2$.
Or comme k est un entier naturel, $K = k^2$ est aussi un entier naturel.

L'égalité $x = K^2$ permet donc d'affirmer que $x \in E$.

On retiendra cette méthode qui est toujours la même pour démontrer qu'un ensemble est inclus dans un autre.

Remarque :
Il est facile de voir que l'inclusion $E \subset F$ est fausse. En effet, $25 \in E$ mais $25 \notin F$ (en effet, $\sqrt[4]{25} = \sqrt{5}$ et $\sqrt{5} \notin \mathbb{N}$).

2°) Quel est le plus petit élément de E supérieur ou égal à 2022 ? Quel est le plus petit élément de F supérieur ou égal à 2022 ?

2025 $\qquad\qquad$ 2401

On a $45^2 = 2025$ et $7^4 = 2401$.

II.

Soit a, b, c, d quatre entiers relatifs tels que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. On pose $E = [\![a\,;b]\!]$ et $F = [\![c\,;d]\!]$.

On note A et B les sous ensembles de $\mathbb{Z}$ ainsi définis : $A = \left\{ x+y, (x\,;y) \in E \times F \right\}$; $B = \left\{ xy, (x\,;y) \in E \times F \right\}$.

• On peut noter d'emblée que A et B sont des sous-ensembles (ou des parties) de $\mathbb{Z}$. • A est l'ensemble de toutes les sommes possibles que l'on peut obtenir en ajoutant un élément de E et un élément de F. • B est l'ensemble de tous les produits possibles que l'on peut obtenir en multipliant un élément de E et un élément de F. • Attention, A et B sont des intervalles d'entiers. Ils sont différents de $\left\{ a\,;b \right\}$ et $\left\{ c\,;d \right\}$.

1°) Sur la ligne ci-dessous, écrire A sous la forme d'un intervalle d'entiers avec doubles crochets et exprimer le cardinal de A en fonction de a, b, c, d.

$A = [\![a+c\,;b+d]\!]$ $\qquad$ $\operatorname{card} A = b+d-(a+c)+1$

2°) Dans cette question, on suppose a, b, c, d sont positifs ou nuls.
Exprimer le minimum et le maximum de B en fonction de a, b, c, d. $\quad \min B = ac$ $\qquad \max B = bd$

On utilise l'hypothèse « a, b, c, d positifs ou nuls ».

$\forall x \in E \quad a \leqslant x \leqslant b$

$\forall y \in F \quad c \leqslant y \leqslant d$

Comme les deux inégalités ne comportent que des nombres positifs ou nuls, on peut les multiplier membre à membre (règle de la multiplication membre à membre de deux inégalités).

On obtient : $\forall (x\,;y) \in E \times F \quad ac \leqslant xy \leqslant bd$.

Le résultat ac est obtenu pour le couple $(a\,;c)$ de $E \times F$.

Le résultat bd est obtenu pour le couple $(b\,;d)$ de $E \times F$.

III.

Soit a et b deux réels non tous les deux nuls.

On pose $Z = \dfrac{4\mathrm{i}}{(a+\mathrm{i}b)(1+\mathrm{i})^2}$.

Déterminer la forme algébrique de Z.
Écrire la réponse après calculs au brouillon dans l'espace ci-contre.

On doit mener les calculs le plus simplement possible, en évitant les calculs inutiles.

$$Z=\frac{4\text{i}}{(a+\text{i}b)(1+\text{i})^2}$$

$$=\frac{4\text{i}}{(a+\text{i}b)2\text{i}}$$

$$=\frac{2}{a+\text{i}b}$$

$$=\frac{2(a-\text{i}b)}{(a+\text{i}b)(a-\text{i}b)}$$

$$=\frac{2(a-\text{i}b)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{2a-2\text{i}b}{a^2+b^2}$$

IV.

Démontrer que pour tout entier relatif *n*, on a $(1+\text{i})^{4n}=(-4)^n$.

En déduire que pour tout entier relatif *n*, $(1+\text{i})^{4n+2}$ est un imaginaire pur.

$$\forall n\in\mathbb{Z}\quad (1+\text{i})^{4n}=\left[(1+\text{i})^4\right]^n$$

$$=\left[\left((1+\text{i})^2\right)^2\right]^n$$

$$=\left[(2\text{i})^2\right]^n$$

$$=(-4)^n$$

$$\forall n\in\mathbb{Z}\quad (1+\text{i})^{4n+2}=(1+\text{i})^{4n}\times(1+\text{i})^2$$

$$=(-4)^n\times 2\text{i}$$

$$=2\times(-4)^n\,\text{i}$$

Pour tout entier relatif *n*, $2\times(-4)^n$ est un entier relatif donc un réel.

Par conséquent, pour tout entier relatif *n*, le produit $2\times(-4)^n\,\text{i}$ est un imaginaire pur.

V.

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et par la relation de récurrence $z_{n+1} = z_n{}^2 + 4$ pour tout entier naturel n.
À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\mathrm{Im}\, z_n < 0$.

5 (une seule réponse sans égalité)

On cherche $\min\{n \in \mathbb{N} \,/\, \mathrm{Im}\, z_n < 0\}$ (à noter que cela suppose que l'ensemble des entiers naturels n tels que $\mathrm{Im}\, z_n < 0$ est non vide).

On calcule les premiers termes de la suite, avec la calculatrice pour gagner du temps.

L'onglet « Suites » de la calculatrice Numworks ne fonctionne que pour des suites réelles
On ne peut donc pas l'utiliser ici.

On va dans « Calculs » et on utilise la touche Ans.

On tape 1 + i puis on appuie sur la touche $\boxed{\text{EXE}}$.

Ensuite, on appuie sur la touche $\boxed{\text{Ans}}$ puis sur la touche $\boxed{\text{x}^2}$ (affichage : $\text{ans}^2 + 4$).
En appuyant plusieurs fois de suite sur la touche $\boxed{\text{EXE}}$, on obtient les termes successifs de la suite.

$z_1 = 4 + 2\mathrm{i}$
$z_2 = 16 + 16\mathrm{i}$
$z_3 = 4 + 512\mathrm{i}$
$z_4 = -\ 262128 + 4096\mathrm{i}$
$z_5 = 68094311168 - 2147252576\mathrm{i}$

On va dire que le plus petit entier naturel n tel que $\mathrm{Im}\, z_n < 0$ est 5.
On ne peut pas dire « à partir de l'indice 5 ».

5 (une seule réponse sans égalité)

VI.

Dans cet exercice, les deux équations ont pour inconnue $z \in \mathbb{C}$. On donnera les solutions sous forme algébrique.

Compléter les phrases suivantes :

• La solution de l'équation $\mathrm{i} \times \overline{z} + 1 = \overline{(2\mathrm{i} - 1)z}$ est $-\dfrac{1+3\mathrm{i}}{10}$.

Beaucoup d'élèves sont passés par la forme algébrique de z en posant $z = a + \mathrm{i}b$.
Ce n'est pas une bonne idée.
Il vaut mieux privilégier une démarche directe.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}\times\overline{z}+1=\overline{(2\mathrm{i}-1)z}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{i}\times\overline{z}+1=\overline{2\mathrm{i}-1}\times\overline{z}$ (propriété du conjugué pour le produit)

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\overline{z}+1=(-2\mathrm{i}-1)\overline{z}$

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\overline{z}+(2\mathrm{i}+1)\overline{z}=-1$

$\Leftrightarrow (\mathrm{i}+2\mathrm{i}+1)\overline{z}=-1$

$\Leftrightarrow (1+3\mathrm{i})\overline{z}=-1$

$\Leftrightarrow \overline{z}=-\dfrac{1}{1+3\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow \overline{z}=-\dfrac{1-3\mathrm{i}}{10}$

$\Leftrightarrow z=-\dfrac{1+3\mathrm{i}}{10}$

● Les solutions de l'équation $z^3+2z^2+2z=0$ sont 0, $-1-\mathrm{i}$, $-1+\mathrm{i}$.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+2z^2+2z=0$ (2).

$(2) \Leftrightarrow z\left(z^2+2z+2\right)=0$

$\Leftrightarrow z=0$ ou $z^2+2z+2=0$

$\Leftrightarrow z=0$ ou $z=-1-\mathrm{i}$ ou $z=-1+\mathrm{i}$

Pour déterminer les racines du polynôme z^2+2z+2, on calcule le discriminant réduit.

$a=1$, $b=2$, $b'=\dfrac{b}{2}=1$, $c=3$

On obtient $\Delta'=1-2=-1$.

On a : $\Delta'<0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$z_1=\dfrac{-b'-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$

$z_1=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{1}}{1}$

$z_1=-1-\mathrm{i}$

$z_2=\dfrac{-b'+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$

$z_2=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{1}}{1}$

$z_2=-1+\mathrm{i}$

VII.

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on donne le vecteur $\vec{w} = 2\vec{v} - \vec{u}$ et le point A d'affixe $3+3\mathrm{i}$.

Quelle est l'affixe du point B de P tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{w} \quad (1)$?

$$2+5\mathrm{i}$$

On sait que $\vec{w} = 2\vec{v} - \vec{u}$ donc $\vec{w}$ a pour coordonnées $(-1\,;2)$ dans la base $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ de l'ensemble des vecteurs du plan.

On en déduit que $\vec{w}$ a pour affixe $z_{\vec{w}} = 2\mathrm{i}-1$.

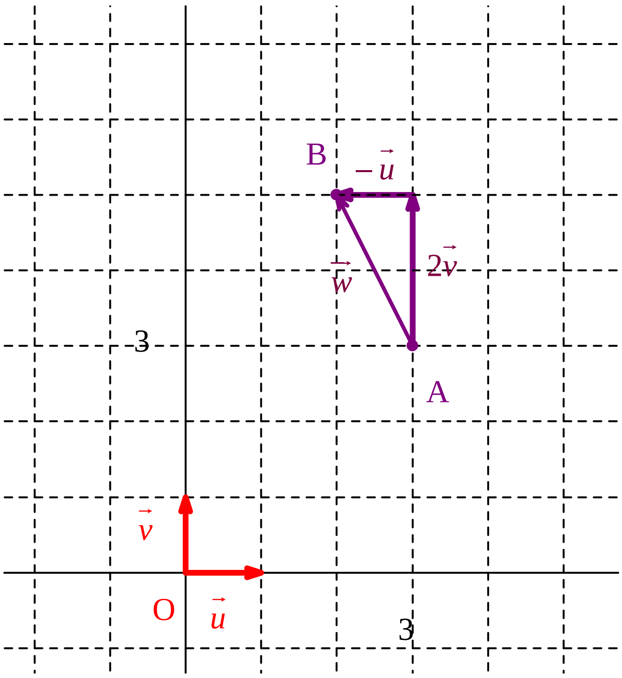
$(1) \Leftrightarrow z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = z_{\vec{w}}$

$\Leftrightarrow z_{\mathrm{B}} = 3+3\mathrm{i}+2\mathrm{i}-1$

$\Leftrightarrow z_{\mathrm{B}} = 2+5\mathrm{i}$

On peut vérifier le résultat sur un graphique en effectuant la construction vectorielle.

On trace un représentant de $\vec{w}$ d'origine A, ce qui permet d'obtenir le point B et de lire ses coordonnées.



On peut aussi tracer un représentant de $\vec{w}$ d'origine O (origine du repère).