T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 14 octobre 2022

Fiche

50 minutes

Numéro : …..

Prénom et nom : …………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points : 1 point + 1 point)

Dans cet exercice, le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer dans chaque cas la position relative des droites D_1 et D_2 dont on donne un système d'équations paramétriques.

1$^{\text{er}}$ cas : $D_1 \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$; $D_2 \begin{cases} x = 3t \\ y = 6t - 2 \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$ 2$^{\text{e}}$ cas : $D_1 \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 3t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$; $D_2 \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 3t + 1 \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$.

Compléter les phrases ci-dessous et rédiger la démarche au verso de la feuille annexe.

1$^{\text{er}}$ cas : D_1 et D_2 sont ……………………….. 2$^{\text{e}}$ cas : D_1 et D_2 sont ………………………..

II. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

1°) Compléter : $\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{}$ …….. $\ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{}$ …….. .

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Sur la feuille annexe :

- faire le tableau de variations de la fonction logarithme népérien avec les limites ;
- tracer la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 1 et e.

Compléter la phrase suivante :

$\mathcal{C}$ admet l'axe des …………………… pour asymptote …………………… .

La fonction logarithme népérien est-elle minorée sur $\mathbb{R}_+^*$? majorée sur $\mathbb{R}_+^*$? bornée sur $\mathbb{R}_+^*$?

……….

2°) Soit a un réel donné. On note S_1 et S_2 les ensembles de solutions respectifs de l'équation $\ln x = a$ et de l'inéquation $\ln x < a$.

Écrire les ensembles S_1 et S_2 (une seule réponse à chaque fois).

……………… ………………

3°) Compléter la phrase :

L'ensemble des réels x dont le logarithme népérien est strictement négatif est …….. .

III. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1°) Calculer la dérivée de *f*. On donnera le résultat sous forme factorisée. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ………………………..…….

2°) En déduire la dérivée des fonctions $f_1 : x \mapsto 3x^2 \ln x$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2 \ln x}{2}$, $f_3 : x \mapsto 5 - 2x^2 \ln x$ (forme factorisée).

………………………………………	………………………………………	………………………………………

3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Compléter les phrases suivantes après recherche au brouillon.

• $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse ….. .

• La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ a pour coefficient directeur ….. .

IV. (2 points)

Compléter la phrase :
Une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x + 1 - \dfrac{3}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est la fonction $F : x \mapsto$ ……………… .

V. (4 points)

On considère les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$\ln x + \ln 2 = 1 \quad (1)$; $\ln\left(\sqrt{x}\right) = 2\ln 2 \quad (2)$; $4\ln x - 3\ln\left(x^2\right) = \ln 2 \quad (3)$; $\ln(x-2) = 1 \quad (4)$.
Compléter le tableau suivant en écrivant les différents ensembles sans égalités :

	Équation (1)	Équation (2)	Équation (3)	Équation (4)
Ensemble de résolution				
Ensemble des solutions				

Écrire le détail de la résolution pour deux équations au choix au verso de la feuille annexe.

VI. (2 points)

On considère une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(1-2x)$.
Calculer la dérivée de *g* en fonction de la dérivée de *f*.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) =$ ………………

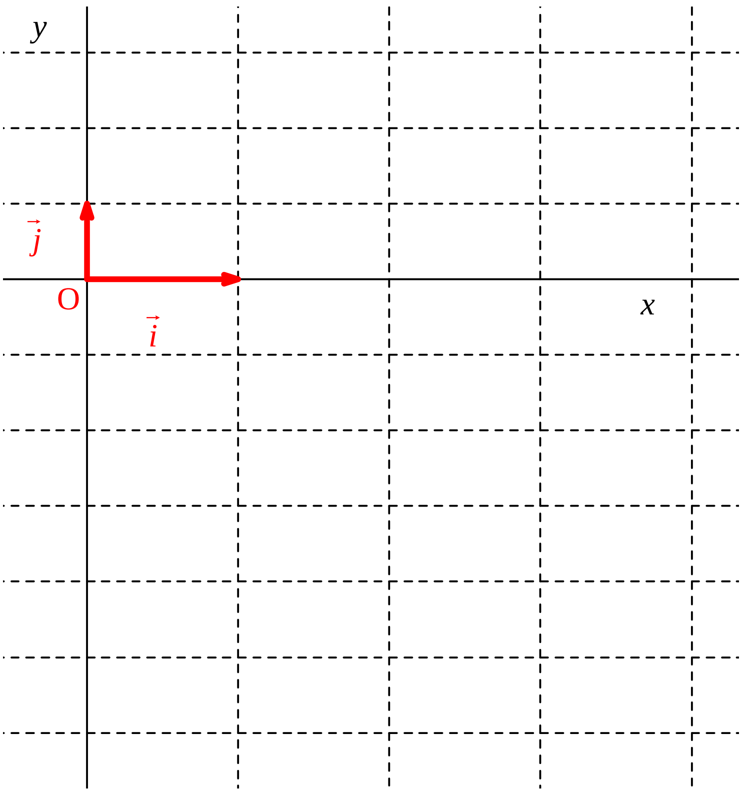
Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

Annexe de l’interrogation écrite du vendredi 14 octobre 2022

II.

Tableau de variations :

Graphique :



Corrigé de l'interrogation écrite du 14-10-2022

I.

Dans cet exercice, le plan est muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer dans chaque cas la position relative des droites D_1 et D_2 dont on donne un système d'équations paramétriques.

1^er^ cas : D_1 $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$ $\left(t \in \mathbb{R}\right)$; D_2 $\begin{cases} x = 3t \\ y = 6t - 2 \end{cases}$ $\left(t \in \mathbb{R}\right)$ 2^e^ cas : D_1 $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 3t \end{cases}$ $\left(t \in \mathbb{R}\right)$; D_2 $\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 3t + 1 \end{cases}$ $\left(t \in \mathbb{R}\right)$.

Compléter les phrases ci-dessous et rédiger la démarche au verso de la feuille annexe.

1^er^ cas : D_1 et D_2 sont parallèles.

2^e^ cas : D_1 et D_2 sont sécantes.

1^er^ cas :

$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_1.

$\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_2.

On constate que $\overrightarrow{u_2} = 3\overrightarrow{u_1}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires.

On en déduit que les droites D_1 et D_2 sont parallèles.

On peut démontrer que D_1 et D_2 sont strictement parallèles, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas confondues.

Il est possible de parler du coefficient directeur mais il vaut mieux l'éviter.

2^e^ cas :

$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_1.

$\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_2.

On constate qu'il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{u_2} = k\overrightarrow{u_1}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

On en déduit que les droites D_1 et D_2 sont sécantes.

On peut aussi utiliser la notion de déterminant.

Rappel : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (déterminant d'ordre 2)

La notion de déterminant est utilisée en géométrie analytique pour la colinéarité des vecteurs dans le plan muni d'un repère.

On peut vérifier la réponse en traçant les droites sur l'écran de la calculatrice.

II.

1°) Compléter : $\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ $\ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Sur la feuille annexe :
- faire le tableau de variations de la fonction logarithme népérien avec les limites ;
- tracer la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 1 et e.

Compléter la phrase suivante :

$\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

La fonction logarithme népérien est-elle minorée sur $\mathbb{R}_+^*$? majorée sur $\mathbb{R}_+^*$? bornée sur $\mathbb{R}_+^*$?

La fonction logarithme népérien n'est ni minorée sur $\mathbb{R}_+^*$, ni majorée sur $\mathbb{R}_+^*$, ni bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ (à cause des limites en + ∞ et en).

2°) Soit a un réel donné. On note S_1 et S_2 les ensembles de solutions respectifs de l'équation $\ln x = a$ et de l'inéquation $\ln x < a$.

Écrire les ensembles S_1 et S_2 (une seule réponse à chaque fois).

$$S_1 = \left\{ \mathrm{e}^a \right\} \qquad S_2 = \left]0\,;\mathrm{e}^a\right[$$

3°) Compléter la phrase :

L'ensemble des réels x dont le logarithme népérien est strictement négatif est l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1°) Calculer la dérivée de f. On donnera le résultat sous forme factorisée. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = x(2\ln x + 1)$

On applique la formule de dérivation d'un produit.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 2x \times \ln x + x^2 \times \frac{1}{x}$$

$$= 2x \ln x + x$$

$$= x(2\ln x + 1)$$

2°) En déduire la dérivée des fonctions $f_1 : x \mapsto 3x^2 \ln x$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2 \ln x}{2}$, $f_3 : x \mapsto 5-2x^2 \ln x$ (forme factorisée).

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_1'(x) = 3x(2\ln x+1)$	$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_2'(x) = \dfrac{x(2\ln x+1)}{2}$	$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_3'(x) = -2x(2\ln x+1)$

• Pour f_1, on observe que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_1(x) = 3f(x)$. Autrement dit, $f_1 = 3f$.
On en déduit que $f_1' = 3f'$ (formule du cours $(ku)' = ku'$).

• Pour f_2, on observe que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_2(x) = \dfrac{f(x)}{2}$. Autrement dit, $f_2 = \dfrac{f}{2}$ ce que l'on peut écrire $f_2 = \dfrac{1}{2} f$.
On en déduit que $f_2' = \dfrac{1}{2} f'$ (formule du cours $(ku)' = ku'$) soit $f_2' = \dfrac{f'}{2}$.

• Pour f_3, on observe que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_3(x) = 5-2f(x)$. Autrement dit, $f_3 = 5-2f$.
On en déduit que $f_3' = 0-2f'$ soit $f_3' = -2f'$.

3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Compléter les phrases suivantes après recherche au brouillon.

• $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

• La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

• On cherche les réels $x > 0$ tels que $f'(x) = 0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow x(2\ln x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ (impossible car $x > 0$) ou $2\ln x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\ln x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

• On sait que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{\text{e}}$ est donné par $f'\left(\frac{1}{\text{e}}\right)$.

On calcule donc $f'\left(\frac{1}{\text{e}}\right)$.

$$f'\left(\frac{1}{\text{e}}\right)=\frac{1}{\text{e}}\times\left(2\ln\frac{1}{\text{e}}+1\right)=\frac{1}{\text{e}}\times\left(2\times(-1)+1\right)=\frac{1}{\text{e}}\times(-1)=-\frac{1}{\text{e}}$$

IV.

Compléter la phrase :

Une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x+1-\frac{3}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est la fonction $\text{F} : x \mapsto x^2+x-3\ln x$.

V.

On considère les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$\ln x+\ln 2=1 \quad (1)$; $\ln\left(\sqrt{x}\right)=2\ln 2 \quad (2)$; $4\ln x-3\ln\left(x^2\right)=\ln 2 \quad (3)$; $\ln(x-2)=1 \quad (4)$.

Compléter le tableau suivant en écrivant les différents ensembles sans égalités :

	Équation (1)	Équation (2)	Équation (3)	Équation (4)
Ensemble de résolution	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$]2\,;+\infty[$
Ensemble des solutions	$\left\{\frac{\text{e}}{2}\right\}$	$\{16\}$	$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$	$\{\text{e}+2\}$

On peut aussi donner l'ensemble de résolution $\mathbb{R}_+^*$ en intervalle sous la forme $]0\,;+\infty[$.

Écrire le détail de la résolution pour deux équations au choix au verso de la feuille annexe.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x+\ln 2=1 \quad (1)$.

Condition d'existence :

On doit avoir $x>0$.
On résout donc l'équation (1) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(1) \Leftrightarrow \ln(2x)=\ln\text{e}$

$\Leftrightarrow 2x=\text{e}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\text{e}}{2}$ qui convient car $\frac{\text{e}}{2}>0$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \{e^2\}$

● Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln\left(\sqrt{x}\right) = 2\ln 2 \quad (2)$.

Conditions d'existence :

On doit avoir $\begin{cases} x \geqslant 0 & \text{(existence de la racine carrée)} \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x > 0 \end{cases}$ soit enfin $x > 0$.

On résout donc l'équation (2) dans $\mathbb{R}_+^*$.

1ère méthode :

$(2) \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{x}\right) = \ln\left(2^2\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{x}\right) = \ln 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 4$

$\Leftrightarrow x = 16$ qui convient car $16 > 0$

2e méthode :

$(2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln x = 2\ln 2$

$\Leftrightarrow \ln x = 4\ln 2$

$\Leftrightarrow \ln x = \ln\left(2^4\right)$

$\Leftrightarrow \ln x = \ln 16$

$\Leftrightarrow x = 16$ qui convient car $16 > 0$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2 = \{16\}$

On peut aussi écrire $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{\ln x}{2}$ d'après une propriété du logarithme népérien.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $4\ln x - 3\ln\left(x^2\right) = \ln 2 \quad (3)$.

Conditions d'existence :

On doit avoir $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$ soit $x > 0$.
On résout donc l'inéquation (3) dans $\mathbb{R}_+^*$.

1ère méthode :

$(3) \Leftrightarrow 4\ln x - 3\times 2\ln x = \ln 2$

$\Leftrightarrow -2\ln x = \ln 2$

$\Leftrightarrow \ln x = -\dfrac{\ln 2}{2}$

$\Leftrightarrow \ln x = -\ln\sqrt{2}$ (ou $\ln x = \ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)$ en utilisant une écriture en exposant fractionnaire)

$\Leftrightarrow \ln x = \ln\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2e méthode :

$(3) \Leftrightarrow 4\ln x - 3\times 2\ln x = \ln 2$

$\Leftrightarrow -2\ln x = \ln 2$

$\Leftrightarrow -\ln\left(x^2\right) = \ln 2$

$\Leftrightarrow \ln\dfrac{1}{x^2} = \ln 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2} = 2$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (on retient cette solution) ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (on ne retient pas cette solution)

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$$S_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x-2)=1 \quad (4)$.

Conditions d'existence :

On doit avoir $x-2>0$ soit $x>2$.
On résout donc l'équation (4) dans l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

$$(4) \Leftrightarrow \ln(x-2)=\ln \mathrm{e}$$

$$\Leftrightarrow x=\mathrm{e}+2 \text{ qui convient car } \mathrm{e}+2>2$$

Soit S_4 l'ensemble des solutions de (4).

$$S_4 = \{\mathrm{e}+2\}$$

On vérifie avec la calculatrice les ensembles de solutions en utilisant l'outil de résolution d'équations.

VI.

On considère une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(1-2x)$.
Calculer la dérivée de *g* en fonction de la dérivée de *f*.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -2 \times f'(1-2x)$$

On observe que *g* est la composée de la fonction $u : x \mapsto 1-2x$ suivie de la fonction *f* ce qui se note $g = f \circ u$.

On applique la formule de dérivation d'une composée $(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'[u(x)]$.

$u'(x)=-2$ d'où l'égalité $g'(x)=-2\times f'(1-2x)$.

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………….

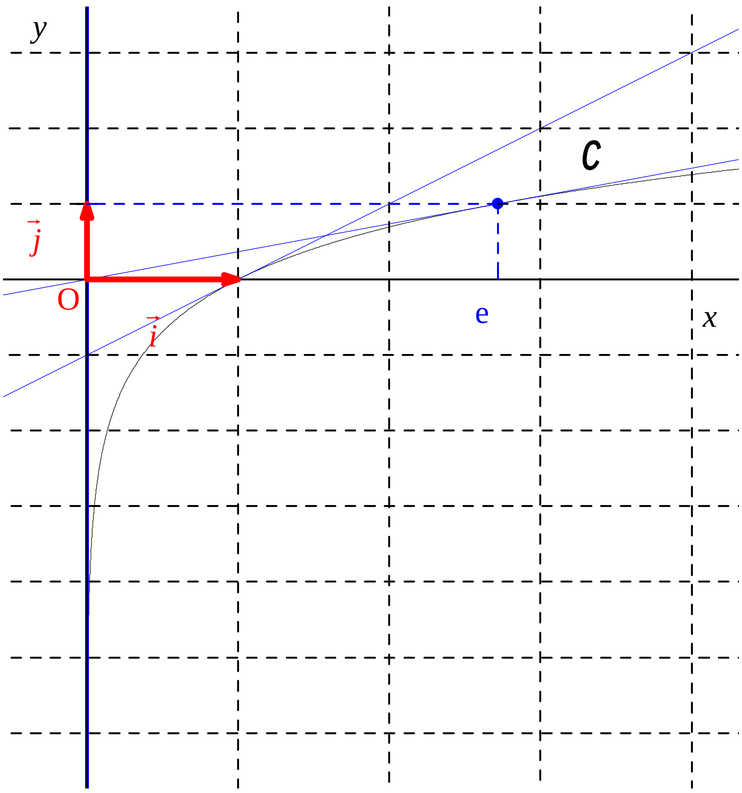
Annexe de l'interrogation écrite du vendredi 14 octobre 2022

II.

Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Graphique :



La courbe $\mathcal{C}$ est entièrement en dessous de ses tangentes.