T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 16 septembre 2022

Durée : 30 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Soit a et b deux réels.

1°) On pose $\mathrm{A}=15a^2b-10ab^2$. Factoriser A au maximum. …………………………… (une seule égalité)

2°) On suppose dans cette question que a et b sont non nuls et on pose $\mathrm{B}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Écrire B sous la forme d'un seul quotient : …………………. (une seule égalité)

II. (4 points : 2 points + 2 points)

Soit a un réel strictement positif.
On note :
S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 \leqslant a$;

S' l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\frac{1}{x}=ax$.

Compléter directement les égalités ci-contre :

$S=$……………………….

$S'=$……………………….

III. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère le polynôme $P(x)=2x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}$.

1°) Calculer son discriminant Δ en détaillant tous les calculs (trois lignes seulement) dans le cadre ci-contre.

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

2°) Calculer $P(-1)$.

$P(-1)=$…………………………………………………………

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

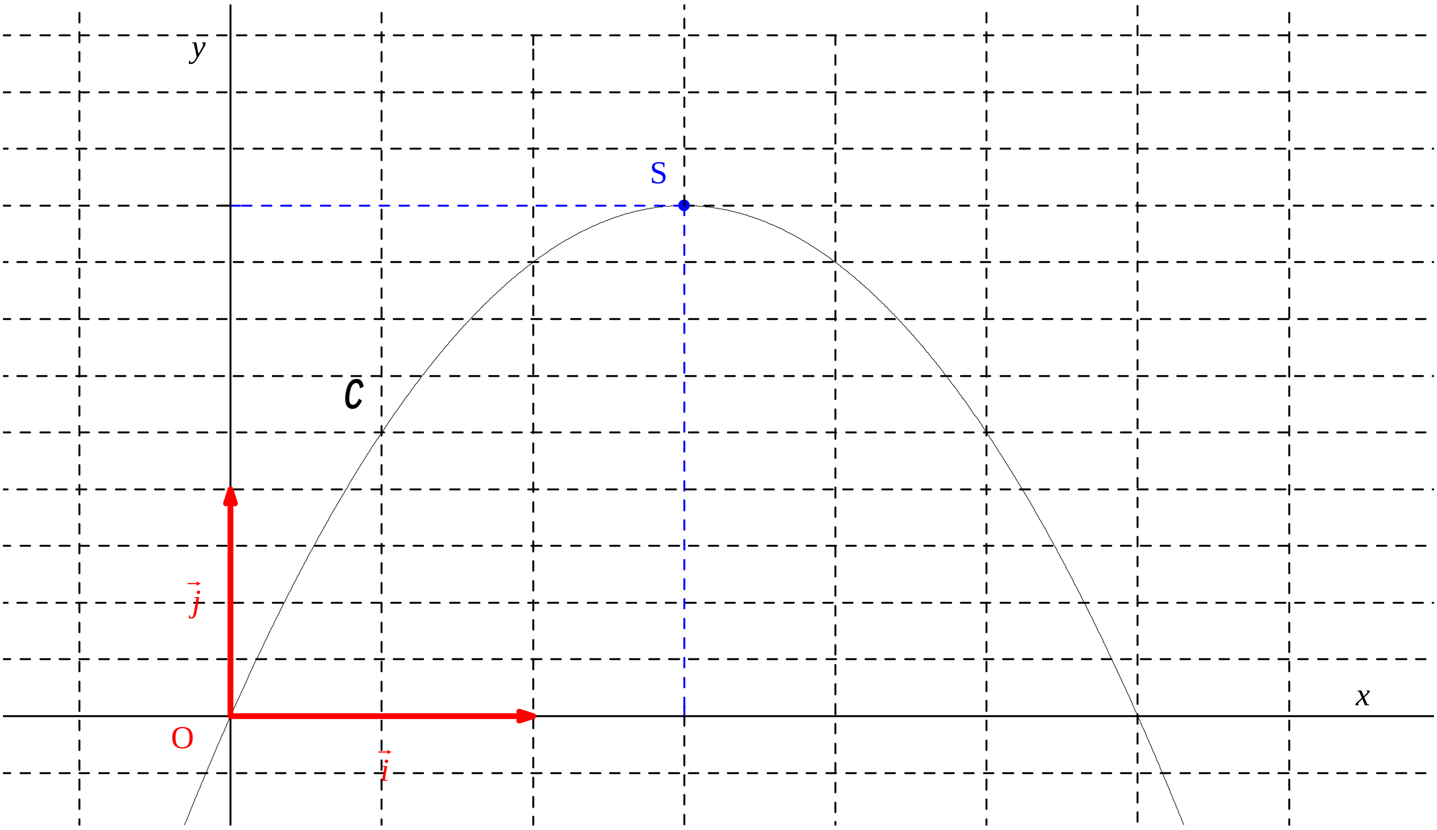
Compléter directement les phrases suivantes :

1°) Les valeurs interdites du quotient $\frac{x^2-25}{x^2-3x+2}$ sont : ……………

2°) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\left(x^2-25\right)\left(x^2-3x+2\right)=0$ sont ……………………

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = 3x - x^2$.



1°) Lire graphiquement les coordonnées de S. S $\left| \begin{array}{l} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$

Retrouver les coordonnées de S par le calcul. S $\left| \begin{array}{l} x_S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$

2°) On note D la droite d'équation $x - 2y = 0$.

D coupe $\mathcal{C}$ en O et en un point A distinct de O. Quelles sont les coordonnées de A ? A $\left| \begin{array}{l} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$

VI. (2 points)

On considère le polynôme $P(x) = x^2 + x + 2$.

Quel est le signe de $P(x)$? Justifier soigneusement.

………..

………..

………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 16-9-2022

I.

Soit a et b deux réels.

1°) On pose $\mathrm{A}=15a^2b-10ab^2$. Factoriser A au maximum. $\mathrm{A}=5ab(3a-2b)$ (une seule égalité)

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=15a^2b-10ab^2\\&=5\times3\times a\times a\times b-5\times a\times b\times b\\&=5ab(3a-2b)\end{aligned}$$

2°) On suppose dans cette question que a et b sont non nuls et on pose $\mathrm{B}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

Écrire B sous la forme d'un seul quotient : $\mathrm{B}=\dfrac{a+b}{ab}$ (une seule égalité)

II.

Soit a un réel strictement positif.
On note :
S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2\leqslant a$;
S' l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\dfrac{1}{x}=ax$.
Compléter directement les égalités ci-contre :

$S=\left[-\sqrt{a}\,;\sqrt{a}\right]$

$S'=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right\}$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2\leqslant a$ (1).

$(1)\Leftrightarrow -\sqrt{a}\leqslant x\leqslant\sqrt{a}$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1}{x}=ax$ (2).

L'ensemble de résolution est $\mathbb{R}^*$.

$(2)\Leftrightarrow 1=ax^2$ (par « produit en croix »)

$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{a}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{1}{a}}$ ou $x=-\sqrt{\dfrac{1}{a}}$ (car $a>0$ par hypothèse donc $\dfrac{1}{a}>0$)

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ ou $x=-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ (car $\sqrt{\dfrac{1}{a}}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$)

On laisse les radicaux aux dénominateurs.

III.

On considère le polynôme $P(x)=2x^2-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}$.

1°) Calculer son discriminant Δ en détaillant tous les calculs (trois lignes seulement) dans le cadre ci-contre.

$$\Delta=\left(-\frac{1}{3}\right)^2-4\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{9}+4$$

$$=\frac{37}{9}$$

2°) Calculer $P(-1)$.

$$P(-1)=2\times(-1)^2-\frac{1}{3}\times(-1)-\frac{1}{2}=2+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{11}{6}$$

IV.

Compléter directement les phrases suivantes :

1°) Les valeurs interdites du quotient $\dfrac{x^2-25}{x^2-3x+2}$ sont 1 et 2.

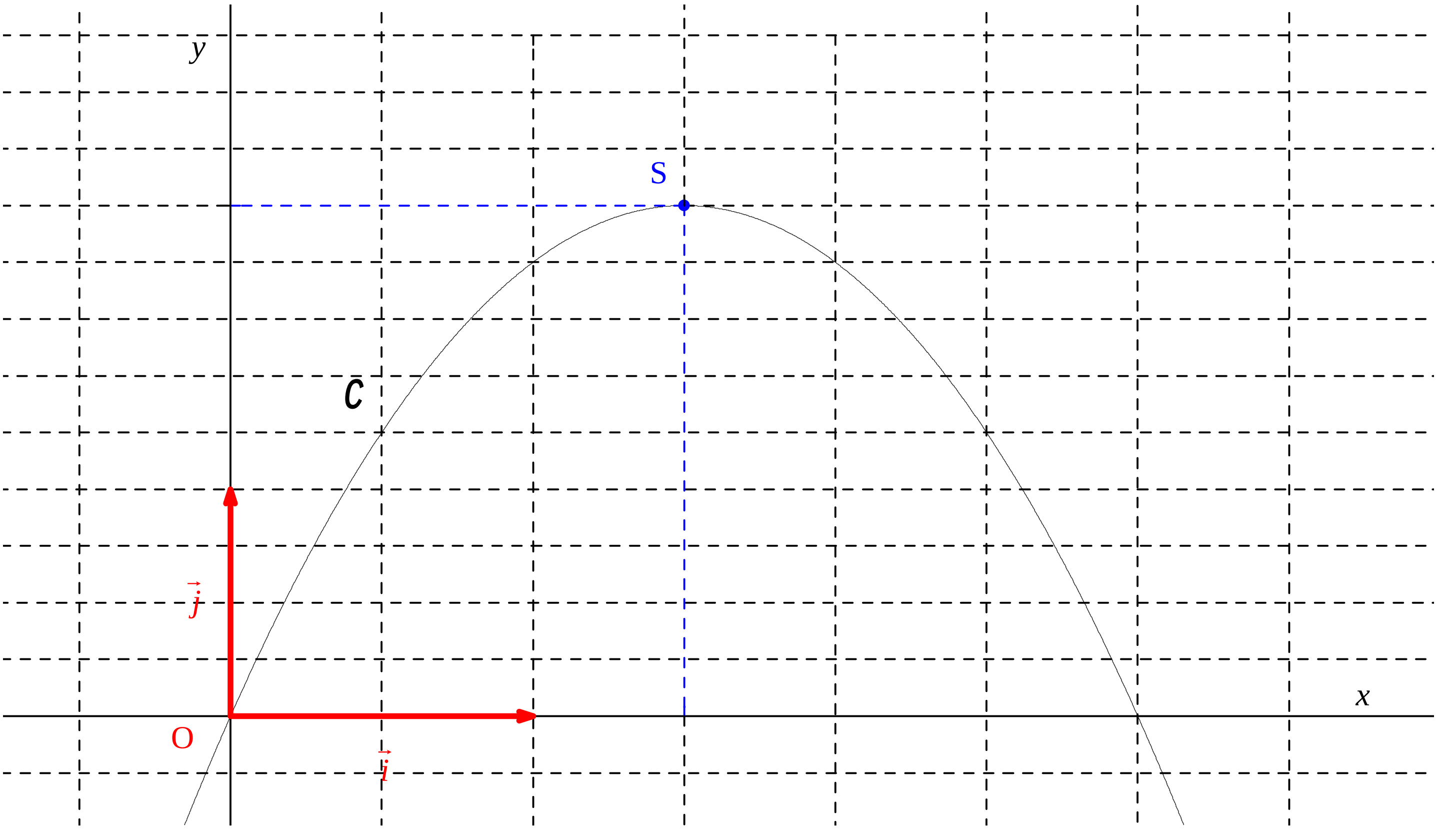
Les racines du polynôme sont x^2-3x+2 sont 1 et 2.
On peut observer que 1 est une racine évidente. On obtient alors l'autre racine en utilisant la formule de la somme ou du produit des racines.

2°) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(x^2-25)(x^2-3x+2)=0$ sont 5, – 5, 1 et 2.

On vérifie à l'aide de la calculatrice.

V.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = 3x - x^2$.



1°) Lire graphiquement les coordonnées de S. $\quad \text{S}\left|\begin{array}{l} \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{9}{4} \end{array}\right.$

Retrouver les coordonnées de S par le calcul. $\quad \text{S}\left|\begin{array}{l} x_{\text{S}} = -\dfrac{3}{2\times(-1)} = -\dfrac{3}{-2} = \dfrac{3}{2} \\ y_{\text{S}} = 3\times\dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{9}{4} \end{array}\right.$

● On applique les formules du cours.

● On peut aussi calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto 3x - x^2$.
L'abscisse du sommet est la valeur d'annulation de la dérivée.

● On évite de passer par la forme canonique (perte de temps).

2°) On note D la droite d'équation $x - 2y = 0$.

D coupe $\mathcal{C}$ en O et en un point A distinct de O. Quelles sont les coordonnées de A ? $\quad \text{A}\left|\begin{array}{l} \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{5}{4} \end{array}\right.$

D a pour équation réduite $y=\dfrac{x}{2}$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions de l'équation $3x-x^2=\dfrac{x}{2}$ (1).

(1) $\Leftrightarrow$ $2\left(3x-x^2\right)=x$ (« produit en croix » pour ne plus avoir de dénominateur)

$\Leftrightarrow$ $6x-2x^2=x$

$\Leftrightarrow$ $5x-2x^2=0$

$\Leftrightarrow$ $x(5-2x)=0$

$\Leftrightarrow$ $x=0$ ou $5-2x=0$

$\Leftrightarrow$ $x=0$ ou $x=\dfrac{5}{2}$

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont donc 0 et $\dfrac{5}{2}$.

D coupe donc $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et au point d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.

Le point d'abscisse 0 est le point O puisque $\mathcal{C}$ passe par O.

Le point d'abscisse $\dfrac{5}{2}$ a pour ordonnée $\dfrac{\frac{5}{2}}{2}=\dfrac{5}{4}$ (calcul grâce à l'équation réduite de D).

On peut vérifier le résultat graphiquement en traçant la droite D sur le graphique ou sur l'écran de la calculatrice.

Il est préférable d'écrire une équation plutôt qu'un système.

VI.

On considère le polynôme $P(x)=x^2+x+2$.

Quel est le signe de $P(x)$? Justifier soigneusement.

$P(x)$ est un polynôme du second degré. On peut appliquer la règle du signe d'un polynôme du second degré.

On calcule son discriminant : $\Delta=1^2-4\times1\times2=-7$.

Δ est donc strictement négatif.

On en déduit que $P(x)$ est toujours du signe du coefficient du monôme de degré 2 c'est-à-dire du signe positif.

Ainsi $P(x)$ est strictement positif quel que soit $x\in\mathbb{R}$.

On peut aussi prendre une valeur test (par exemple, pour 0, $P(0)=2$ qui est strictement positif).

On vérifie également en traçant la courbe représentative de *f* sur l'écran de la calculatrice.

On ne dit pas que $P(x)$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$. Cela est inutile pour la question posée.