T exp

Interrogation écrite du lundi 23 mai 2022 (30 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………..……………………………….. **Note : ….. / 20**

I. (10 points)

Partie 1 :

On pose : $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.

On pose également $\mathrm{U}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exprimer A comme combinaison linéaire de U et V.

………………………………………… (une seule égalité)

On admettra dans la suite que pour tout entier naturel n, on a $\mathrm{A}^n=\dfrac{(a+2b)^n}{3}\mathrm{U}+\dfrac{(a-b)^n}{3}\mathrm{V}$.

Partie 2 :

Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un triangle ABC.
À l'instant $n=0$, le mobile se trouve en A.

Si à l'instant n il est sur l'un des trois sommets, alors à l'instant $n+1$, soit il y reste avec une probabilité égale à $\dfrac{2}{3}$, soit il se déplace sur un des deux autres sommets avec des probabilités égales.

1°) Représenter la situation par un graphe probabiliste en utilisant les états « Le mobile est en A » (état 1), « Le mobile est en B » (état 2), « Le mobile est en C » (état 3).
Écrire la matrice de transition en colonnes à droite.

2°) Pour tout entier naturel n, on considère les événements suivants :

A_n : « Le mobile se trouve en A à l'instant n » ;

B_n : « Le mobile se trouve en B à l'instant n » ;

C_n : « Le mobile se trouve en C à l'instant n ».

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives de A_n, B_n, C_n.
Pour tout entier naturel *n*, on note P_n la matrice colonne donnant l'état probabiliste au bout de *n* transmissions. Ainsi $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

À l'aide du résultat de la partie 1, exprimer M^n en fonction des matrices U et V.
En déduire les expressions de a_n, b_n, c_n en fonction de *n*.

……..

……..

……..

……..

II. (10 points)

Michel débute au jeu des fléchettes. Il effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'il atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'il atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'il a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'il manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.
On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, on considère les événements
A_n : « Michel atteint la cible au *n*-ième coup » et B_n : « Michel atteint la cible au *n*-ième coup ».
On note a_n et b_n les probabilités respectives de A_n et B_n.
Exprimer a_n et b_n en fonction de *n*.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..