T
spé

Interrogation écrite
du vendredi 22 avril 2022

45 minutes

Prénom et nom : …………………………………………

Numéro : ………

Note : ……. **/ 20**

I. (4 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point)

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres.
Le bambou Moso ou bambou d'hiver est une espèce de bambou originaire de Chine. De toutes les espèces de bambou, le bambou Moso est celui qui a la plus grande importance économique en Chine.
On observe un bambou de taille initiale 1 mètre.
On souhaite modéliser la taille de ce bambou par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps *t* exprimé en jour.
On utilise pour cela un modèle continu dû à un biologiste célèbre du XX$^{\text{e}}$ siècle, Karl Ludwig von Bertalanffy (voir feuille annexe).
Selon ce modèle, la fonction cherchée est solution de l'équation différentielle $y'=0,05(20-y)$ (E) où *y* désigne une fonction de la variable *t*, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

1°) Déterminer l'expression de la fonction L solution de (E) vérifiant $\mathrm{L}(0)=1$.

…………………………………………

2°) Selon ce modèle, à partir de quel jour la taille du bambou dépassera-t-elle 15 mètres ?

…… (une seule réponse sans égalité)

II. (4 points)

Pour tout réel *a* strictement positif, on pose $I(a)=\displaystyle\int_a^{2a}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que pour tout réel *a* strictement positif on a $I(a)=\ln\left(\mathrm{e}^a+1\right)$.
On attend une démarche la plus détaillée possible.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

III. (2 points)

Soit *n* un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

Compléter l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=$ ……………….. .

IV. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Soit *a* et *b* deux réels strictement négatifs tels que $a < b$. Quel est le signe de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,dx$? Justifier brièvement sans chercher à calculer *I*.

....

....

V. (8 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 3 points ; 4°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2\ln x}{x}$ définie sur l'intervalle $D =]0 ; +\infty[$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On se réfèrera aux graphiques donnés sur la feuille annexe.

1°) Déterminer l'expression d'une primitive F sur *D*.

On pourra observer que $f(x) = 2 \times \ln x \times \frac{1}{x}$ pour tout réel $x \in D$.

.... (une seule égalité)

2°) Compléter le tableau ci-dessous (voir graphiques 2, 3, 4).

$\mathcal{A}_1 =$	$\mathcal{A}_2 =$	$\mathcal{A}_3 =$ ....

On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

Qu'observe-t-on entre $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$?

....

3°) Soit *a* un réel strictement supérieur ou égal à 1.
On note $S_1(a)$ et $S_2(a)$ les aires respectives en unité d'aire des domaines limités par :
la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$;
la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \frac{1}{a}$.

$S_1(a) =$	$S_2(a) =$ ....

Que constate-t-on ?

....

4°) On note A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 2 et 4.
Démontrer que A et B ont la même ordonnée.

....

....

5°) **Bonus sur 1 point :**
Calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et le segment $[AB]$.

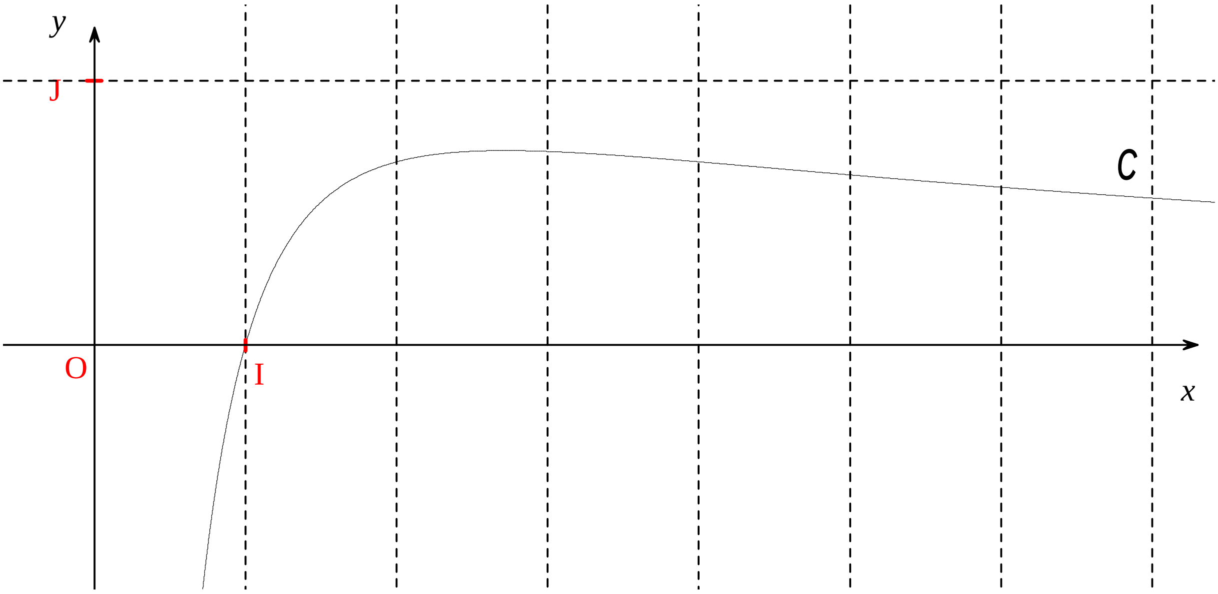
Complément concernant l'exercice I :

Karl Ludwig von Bertalanffy (19 septembre 1901, Atzgersdorf près de Vienne, Autriche – 12 juin 1972, Buffalo, New York, États-Unis) est un biologiste d'origine autrichienne connu comme le fondateur de la systémique grâce à son ouvrage *General System Theory*. Bertalanffy a d'abord travaillé à Vienne puis à Londres, et enfin au Canada et aux États-Unis.

Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Graphiques de l'exercice V

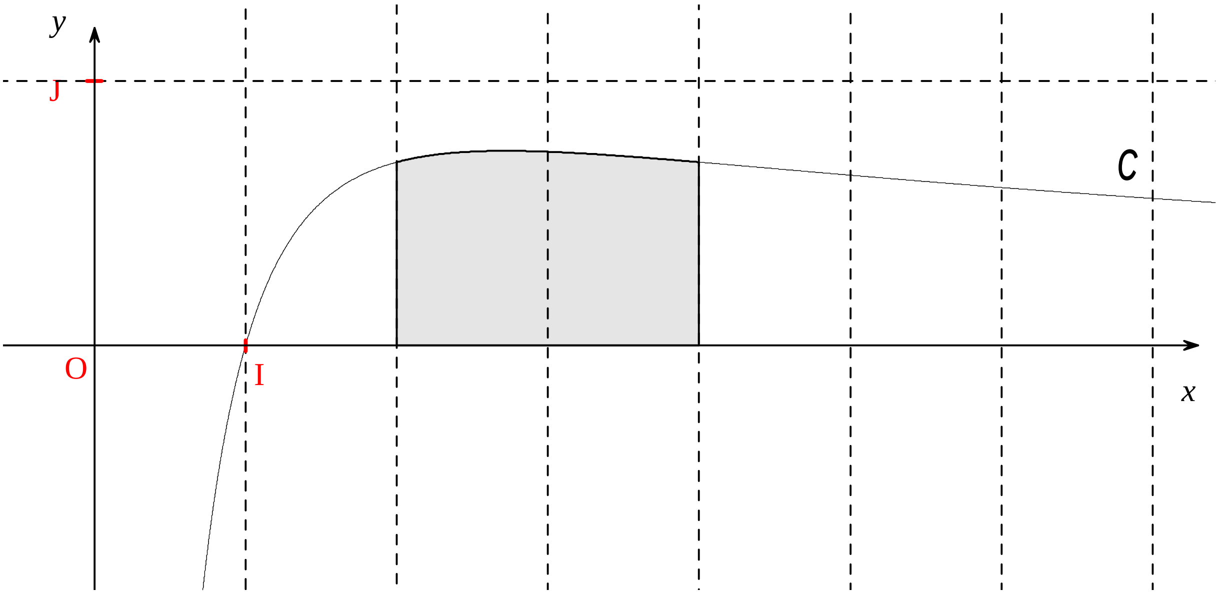
Graphique 1 :



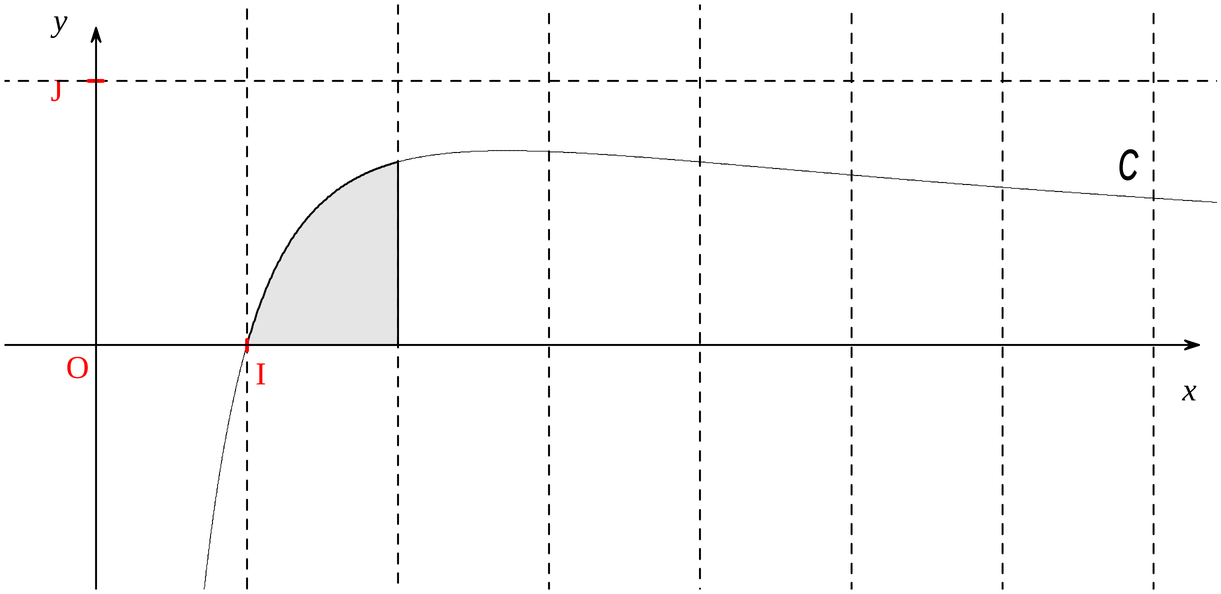
Graphique 2 :

Le domaine grisé est le domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

On note $\mathcal{A}_1$ son aire en unité d'aire.



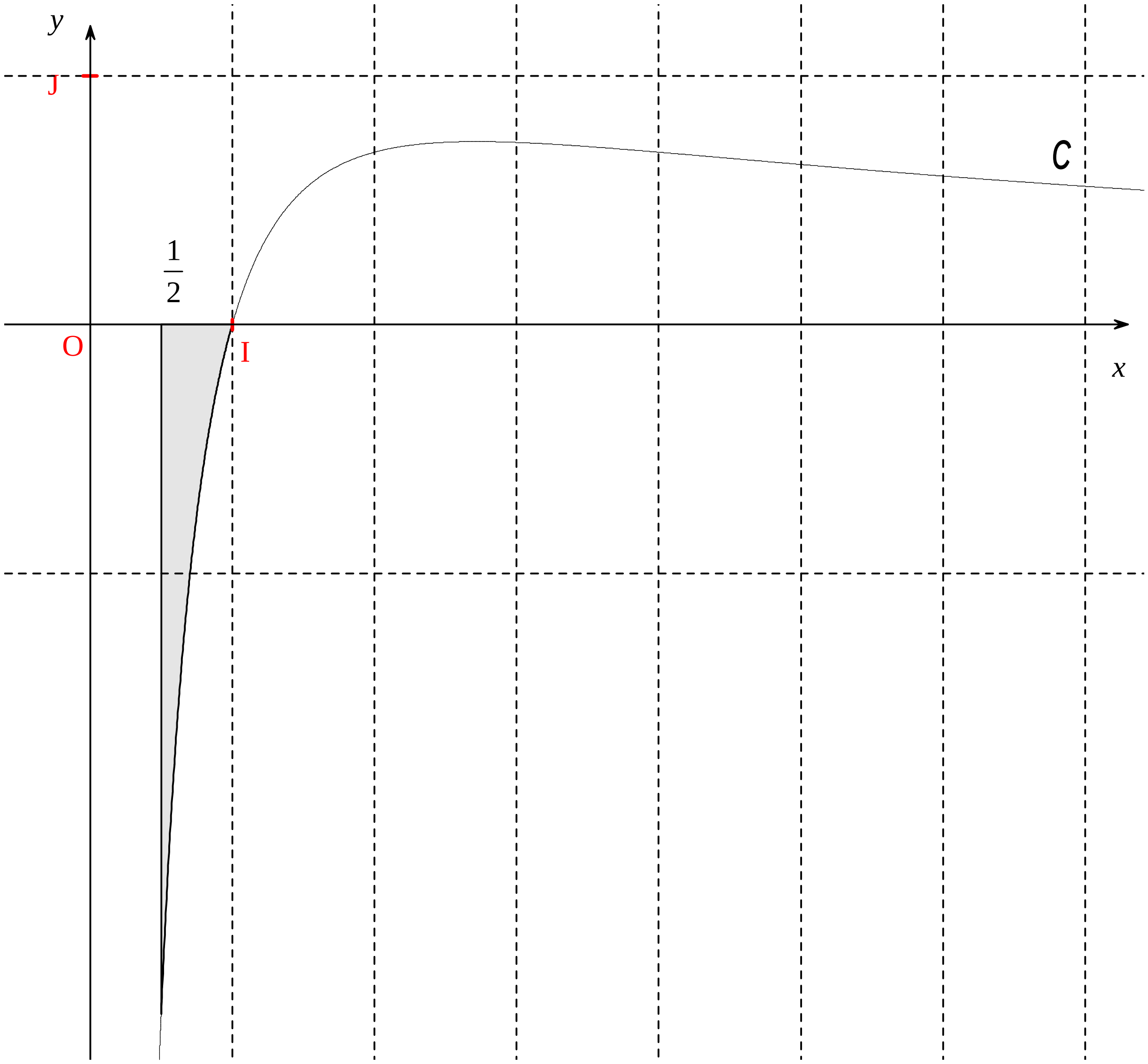
Graphique 3 :
Le domaine grisé est le domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 2$.
On note $\mathcal{A}_2$ son aire en unité d'aire.



Graphique 4 :

Le domaine grisé est le domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

On note $\mathcal{A}_3$ son aire en unité d'aire.



Conseils donnés à l'oral

I.

1°) On écrira $\mathrm{L}\left(t\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

La variable est notée *t*.

Corrigé de l'interrogation écrite du 22-4-2022

I.

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres.
Le bambou Moso ou bambou d'hiver est une espèce de bambou originaire de Chine. De toutes les espèces de bambou, le bambou Moso est celui qui a la plus grande importance économique en Chine.
On observe un bambou de taille initiale 1 mètre.
On souhaite modéliser la taille de ce bambou par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps *t* exprimé en jour.
On utilise pour cela un modèle continu dû à un biologiste célèbre du XX$^{\text{e}}$ siècle, Karl Ludwig von Bertalanffy (voir feuille annexe).
Selon ce modèle, la fonction cherchée est solution de l'équation différentielle $y' = 0,05(20 - y)$ $\quad(\text{E})$ où *y* désigne une fonction de la variable *t*, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

1°) Déterminer l'expression de la fonction L solution de (E) vérifiant $\text{L}(0) = 1$.

(E) s'écrit $y' = -0,05y + 1$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,05$ et $b = 1$.

Les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = k\text{e}^{-0,05t} + \dfrac{1}{0,05}$ $\quad(k \in \mathbb{R})$ soit $f(t) = k\text{e}^{-0,05t} + 20$ $\quad(k \in \mathbb{R})$.

On sait que la fonction L cherchée est solution de (E) donc $\text{L}(t) = k\text{e}^{-0,05t} + 20$ $\quad(k \in \mathbb{R})$.

On sait de plus que $\text{L}(0) = 1$.

On cherche donc le réel *k* tel que $\text{L}(0) = 1$ $\quad(1)$.

On a $\text{L}(0) = k\text{e}^{-0,05\times 0} + 20$ soit $\text{L}(0) = k\text{e}^{0} + 20$ ce qui donne finalement $\text{L}(0) = k + 20$

On raisonne ensuite par équivalences.

$(1) \Leftrightarrow k + 20 = 1$

$\quad\;\; \Leftrightarrow k = -19$

La fonction cherchée est donc la fonction L définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $\text{L}(t) = 20 - 19\text{e}^{-0,05t}$.

On peut vérifier que la fonction L est strictement croissante et que $\text{L}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 20$.
Cette limite est en accord avec la taille maximale d'un bambou Moso qui est de 20 mètres.

2°) Selon ce modèle, à partir de quel jour la taille du bambou dépassera-t-elle 15 mètres ?

27 (une seule réponse sans égalité)

On cherche les réels $t \in [0\,;+\infty[$ tels que $\text{L}(t) > 15$ soit $20 - 19\text{e}^{-0,05t} > 15$ $\quad(2)$.

$(2) \Leftrightarrow -19\mathrm{e}^{-0,05t} > -5$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,05t} < \dfrac{5}{19}$

$\Leftrightarrow -0,05t < \ln\dfrac{5}{19}$

$\Leftrightarrow t > -\dfrac{\ln\frac{5}{19}}{0,05}$

La calculatrice donne $-\dfrac{\ln\frac{5}{19}}{0,05} = 26,700021334...$ donc la taille du bambou dépassera donc 15 mètres à partir du 27e jour.

II.

Pour tout réel a strictement positif, on pose $I(a) = \displaystyle\int_a^{2a} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que pour tout réel a strictement positif on a $I(a) = \ln\left(\mathrm{e}^a + 1\right)$.

On attend une démarche la plus détaillée possible.

$$I(a) = \int_a^{2a} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\ln\left|\mathrm{e}^x - 1\right|\right]_a^{2a}$$

$$= \ln\left|\mathrm{e}^{2a} - 1\right| - \ln\left|\mathrm{e}^a - 1\right|$$

$$= \ln\left(\mathrm{e}^{2a} - 1\right) - \ln\left(\mathrm{e}^a - 1\right)$$

On a $a > 0$ donc $\mathrm{e}^a > \mathrm{e}^0$ soit $\mathrm{e}^a > 1$ ce qui donne $\mathrm{e}^a - 1 > 0$.
Idem pour $\mathrm{e}^{2a} - 1 > 0$.
On peut donc enlever les barres de valeur absolue.

$$= \ln\frac{\mathrm{e}^{2a} - 1}{\mathrm{e}^a - 1}$$

$$= \ln\frac{\left(\mathrm{e}^a\right)^2 - 1^2}{\mathrm{e}^a - 1}$$

$$= \ln\left[\frac{\left(\mathrm{e}^a + 1\right)\left(\mathrm{e}^a - 1\right)}{\mathrm{e}^a - 1}\right]$$

$$= \ln\left(\mathrm{e}^a + 1\right)$$

III.

Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

Compléter l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

$$\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - 0$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

IV.

On considère la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Soit a et b deux réels strictement négatifs tels que $a < b$. Quel est le signe de l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$? Justifier brièvement sans chercher à calculer I.

On a $a < b$ et $\forall x \in [a\,;b] \quad f(x) \geqslant 0$ (on pourrait écrire que $\forall x \in [a\,;b] \quad f(x) > 0$).

Comme les bornes sont dans le « bon » sens, on en déduit que $I \geqslant 0$.

V.

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2\ln x}{x}$ définie sur l'intervalle $D =]0\,;+\infty[$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O, I, J})$. On se réfèrera aux graphiques donnés sur la feuille annexe.

1°) Déterminer l'expression d'une primitive F sur D.

On pourra observer que $f(x) = 2 \times \ln x \times \dfrac{1}{x}$ pour tout réel $x \in D$.

$$\mathrm{F}(x) = (\ln x)^2 \quad \text{(une seule égalité)}$$

On a $f(x) = 2 \times u(x) \times u'(x)$ où u est la fonction définie par $u(x) = \ln x$.

2°) Compléter le tableau ci-dessous (voir graphiques 2, 3, 4).

$\mathcal{A}_1 = 3(\ln 2)^2$ u. a.	$\mathcal{A}_2 = (\ln 2)^2$ u. a.	$\mathcal{A}_3 = (\ln 2)^2$ u. a.

On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

Graphique 1 : Le domaine en gris est défini par le système d'inéquations $\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$.

$\mathcal{A}_1 = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ (car la fonction *f* est positive ou nulle sur l'intervalle $[2\,;4]$)

$$\begin{aligned} &= \left[(\ln x)^2\right]_2^4 \\ &= (\ln 4)^2 - (\ln 2)^2 \\ &= (2\ln 2)^2 - (\ln 2)^2 \\ &= 4(\ln 2)^2 - (\ln 2)^2 \\ &= 3(\ln 2)^2 \end{aligned}$$

Graphique 2 : Le domaine en gris est défini par le système d'inéquations $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$.

$\mathcal{A}_2 = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ (car la fonction *f* est positive ou nulle sur l'intervalle $[1\,;2]$)

$$\begin{aligned} &= \left[(\ln x)^2\right]_1^2 \\ &= (\ln 2)^2 - (\ln 1)^2 \\ &= (\ln 2)^2 \end{aligned}$$

Graphique 3 : Le domaine en gris est défini par le système d'inéquations $\begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 0 \end{cases}$.

$\mathcal{A}_3 = -\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ (car la fonction *f* est négative ou nulle sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$)

$$\begin{aligned} &= -\left[(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= -\left[(\ln 1)^2 - \left(\ln \frac{1}{2}\right)^2\right] \\ &= -\left[0 - (-\ln 2)^2\right] \\ &= -\left[-(\ln 2)^2\right] \\ &= (\ln 2)^2 \end{aligned}$$

Qu'observe-t-on entre $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$?

On observe que $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3$.

3°) Soit a un réel strictement supérieur ou égal à 1.
On note $S_1(a)$ et $S_2(a)$ les aires respectives en unité d'aire des domaines limités par :
la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=a$;
la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\dfrac{1}{a}$.

$S_1(a)=(\ln a)^2$	$S_2(a)=(\ln a)^2$

$S_1(a)=\displaystyle\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x$ (car la fonction f est positive ou nulle sur l'intervalle $[1\,;a]$)

$$\begin{aligned}
&=\left[(\ln x)^2\right]_1^a\\
&=(\ln a)^2-(\ln 1)^2\\
&=(\ln a)^2
\end{aligned}$$

$S_2(a)=-\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ (car la fonction f est négative ou nulle sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{a}\,;1\right]$)

$$\begin{aligned}
&=-\left[(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{a}}^1\\
&=-\left[(\ln 1)^2-\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2\right]\\
&=-\left[0-(-\ln a)^2\right]\\
&=-\left[-(\ln a)^2\right]\\
&=(\ln a)^2
\end{aligned}$$

Que constate-t-on ?

On constate que $S_1(a)=S_2(a)$.

4°) On note A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 2 et 4.
Démontrer que A et B ont la même ordonnée.

$$y_{\mathrm{A}}=f(2)=\frac{2\ln 2}{2}=\ln 2$$

$$y_{\mathrm{B}}=f(4)=\frac{2\ln 4}{4}=\frac{2\ln\left(2^2\right)}{4}=\frac{2\times\cancel{2}\ln 2}{\cancel{2}}=\ln 2$$

On a bien $y_{\mathrm{A}}=y_{\mathrm{B}}$.

5°) **Bonus sur 1 point :**
Calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et le segment $[AB]$.

L'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et le segment $[AB]$ est égale à $3(\ln 2)^2 - 2 \times \ln 2$ (aire sous la courbe $\mathcal{C}$ à laquelle on retire l'aire du rectangle HKBA avec $H(2\,;0)$ et $K(4\,;0)$).

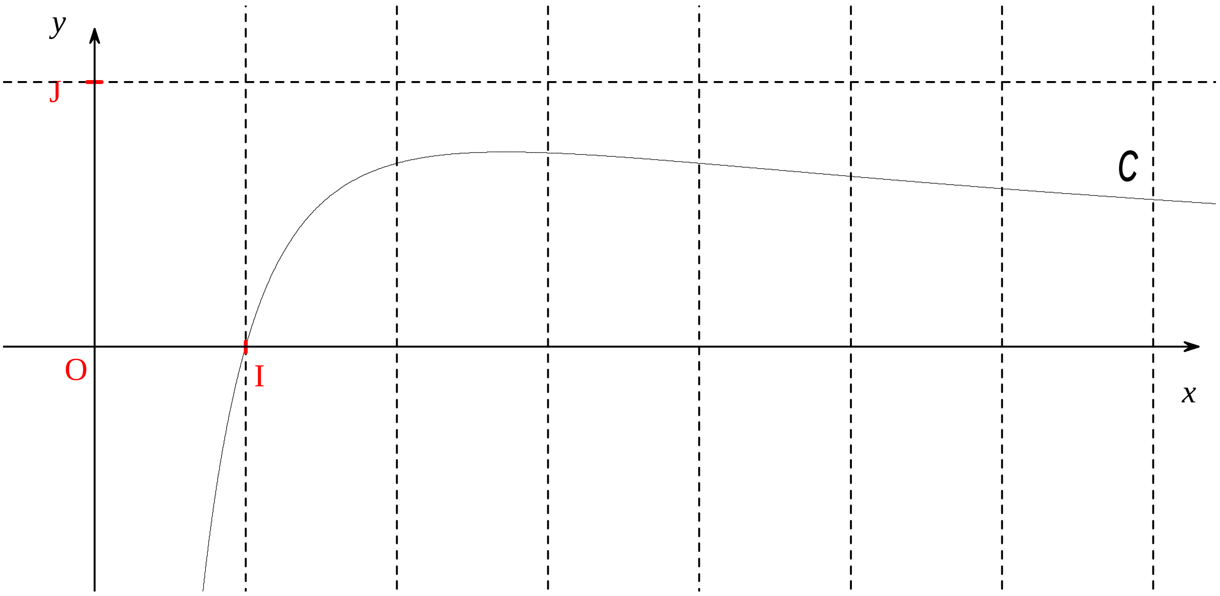
Complément concernant l'exercice I :

Karl Ludwig von Bertalanffy (19 septembre 1901, Atzgersdorf près de Vienne, Autriche – 12 juin 1972, Buffalo, New York, États-Unis) est un biologiste d'origine autrichienne connu comme le fondateur de la systémique grâce à son ouvrage *General System Theory*. Bertalanffy a d'abord travaillé à Vienne puis à Londres, et enfin au Canada et aux États-Unis.

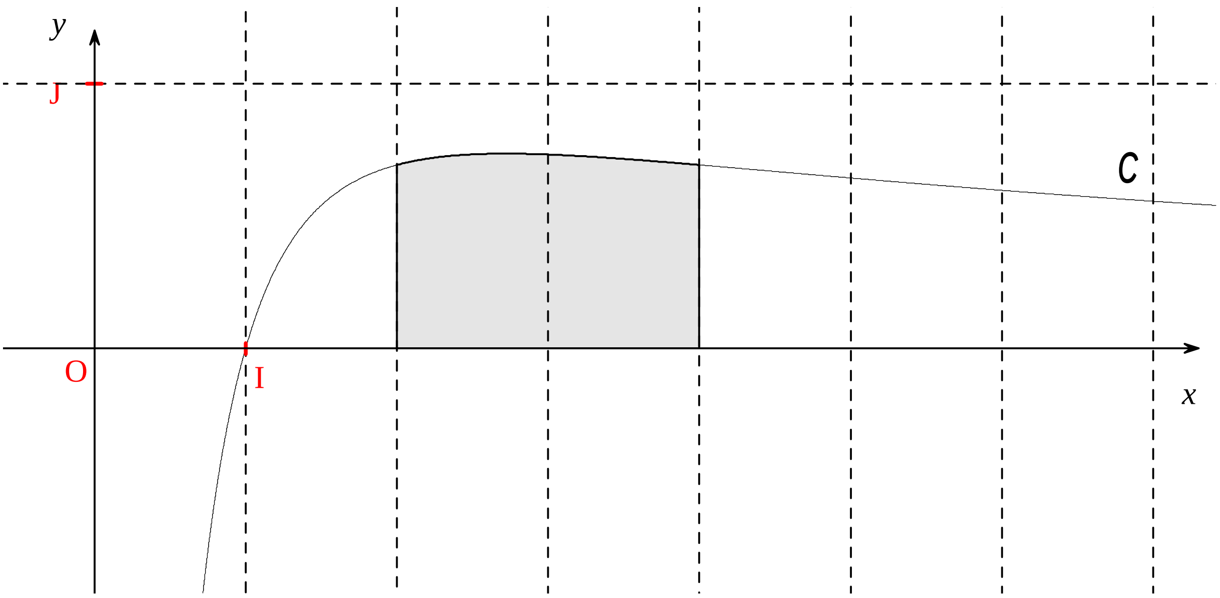
Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Graphiques de l'exercice V

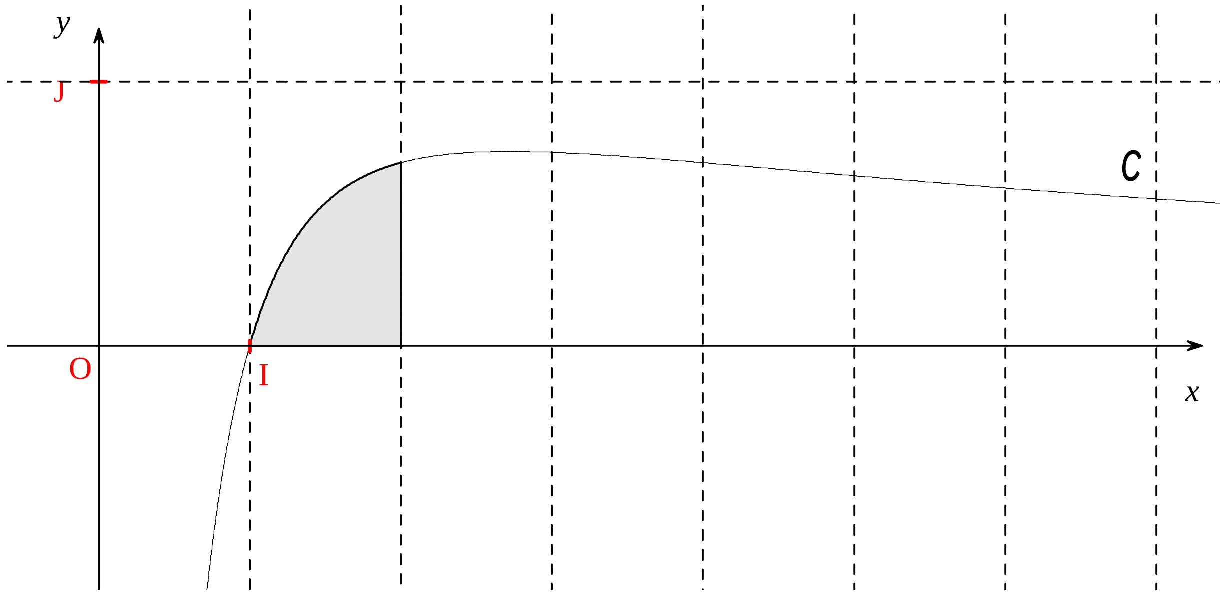
Graphique 1 :



Graphique 2 :
Le domaine grisé est le domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.
On note $\mathcal{A}_1$ son aire en unité d'aire.



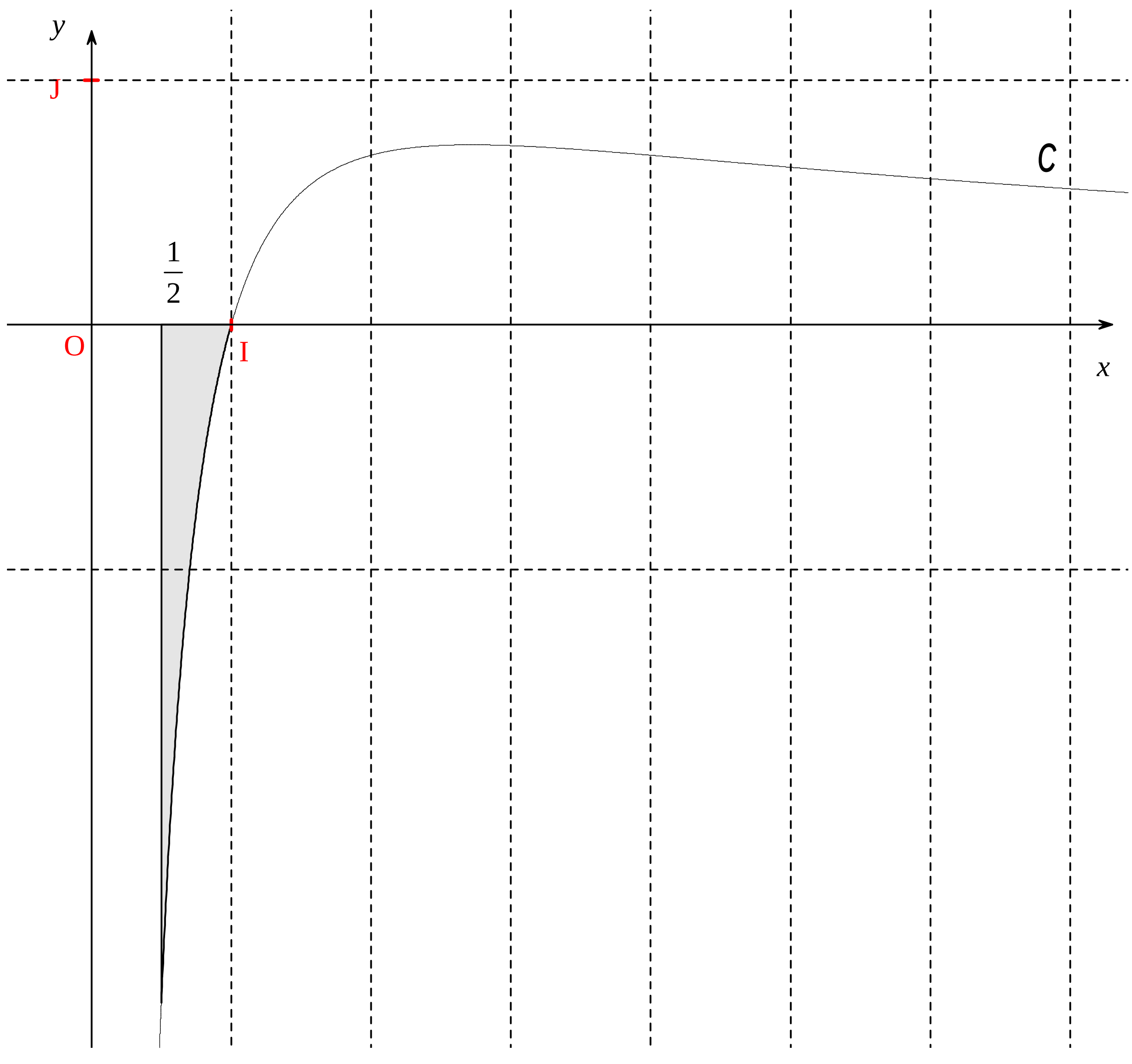
Graphique 3 :
Le domaine grisé est le domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 2$.
On note $\mathcal{A}_2$ son aire en unité d'aire.



Graphique 4 :

Le domaine grisé est le domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

On note $\mathcal{A}_3$ son aire en unité d'aire.



IE 20-3-2019

On pose $I(a)=\int_0^a \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$ et $J(a)=\int_0^a \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$.

1°) Calculer $I(a)+J(a)$.

On admettra que pour tout réel x on a $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

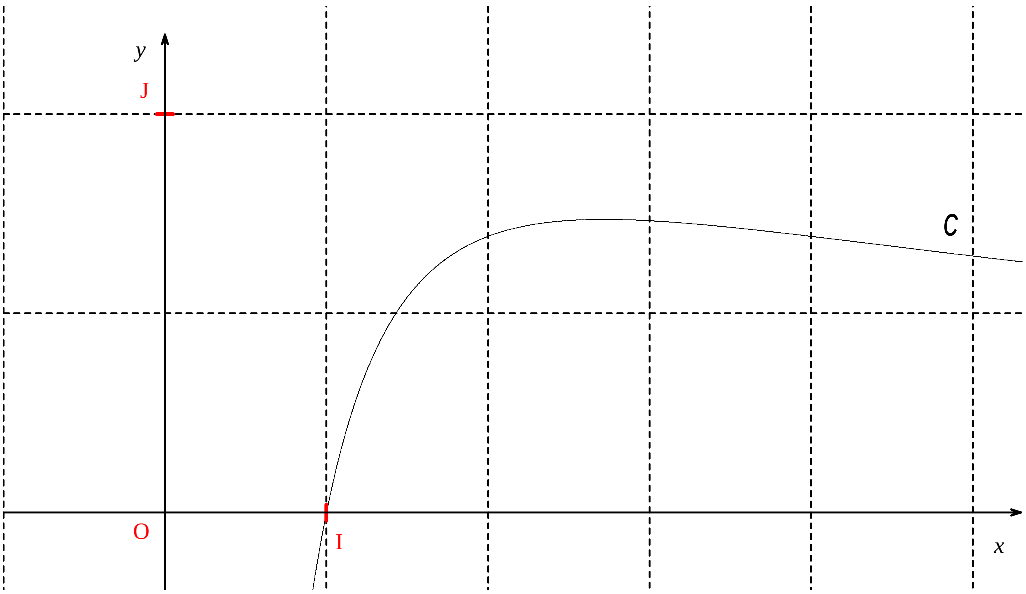
2°) En déduire I(a).

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2\ln x}{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives ln 2 et ln 4.

1°) Démontrer que A et B ont la même ordonnée.

2°) Calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et le segment $[\mathrm{AB}]$.



Source exercice I :

Baccalauréat Asie 8 juin 2021 Jour 2 < ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret Dans cette partie

Calculer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ sur l'intervalle $[\ln 2\,;\ln 4]$. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Calculer $u_n = \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x$ où n est un entier naturel quelconque.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

2°) Calculer les aires $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ (voir graphiques 2, 3, 4 de la feuille annexe).
On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

$\mathcal{A}_1 =$……………………	$\mathcal{A}_2 =$……………………	$\mathcal{A}_3 =$……………………

Calculer les aires $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ (voir graphiques 2, 3, 4 de la feuille annexe).
On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

calculatrice