T spé

Interrogation écrite du vendredi 1er avril 2022

30 minutes

Prénom et nom : ....

Numéro : ....

Note : ...... **/ 20**

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1-x)$.

1°) Quel est l'ensemble de définition de f ? ....

2°) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1^-.

....

....

....

....

....

....

....

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto e^{2x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression de la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(\ln 3) = 5e$.

.... (une seule égalité)

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \cos x \times e^{\sin x} - \sin x \times e^{\cos x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression d'une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

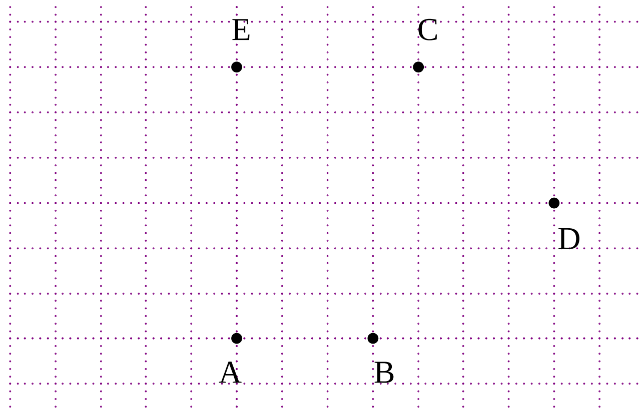
.... (une seule égalité)

III. (2 points)

On considère la figure ci-dessous qui représente un maillage du plan par des carrés de côté 1. Les points A, B, C, D, E sont des nœuds du maillage.

Placer le point F appartenant à la droite (CE) tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = -6$.

Calculer le produit scalaire $p = \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{CE}$.



$p = ...$

Dans les exercices **IV** et **V**, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

IV. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points)

On note *P* le plan d'équation cartésienne $3x + y - z - 1 = 0$.

1°) Quelle est la cote du point A de *P* dont l'abscisse est égale à 5 et l'ordonnée est égale – 4 ?

…… (une seule réponse sans égalité)

2°) On considère les points $\text{B}(0\,;3\,;0)$ et $\text{C}(6\,;5\,;-2)$.

Démontrer que la droite (BC) est orthogonale au plan *P*.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de la droite (BC) et du plan *P*. On utilisera un système d'équations paramétriques de (BC).

……………

V. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point)

On donne les points $\text{A}(2\,;-1\,;0)$, $\text{B}(3\,;-1\,;2)$, $\text{C}(0\,;4\,;1)$, $\text{D}(2\,;5\,;0)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}\,(5\,;-2\,;-4)$.

1°) Déterminer une équation cartésienne du plan *P* passant par A et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur normal.

…………………………

2°) Déterminer la distance du point B au plan *P*.

…………………

3°) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ normal au plan (ABC).

…………………

4°) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Corrigé de l'interrogation écrite du 1-4-2022

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1-x)$.

1°) Quel est l'ensemble de définition de f ? $]-\infty\,;1[$

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow 1-x>0 \\ &\Leftrightarrow x>1 \end{aligned}$$

L'ensemble de définition de f est donc $]-\infty\,;1[$.

2°) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1^-.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \underbrace{(1-x)}_{X} = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty .$$

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice en traçant la courbe représentative de f. On observe une asymptote verticale d'équation $x=1$.

II.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto e^{2x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression de la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(\ln 3) = 5e$.

$$F(x) = \frac{e^{2x+1} + e}{2} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On sait qu'une primitive de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ (a et b étant deux réels, a non nul) est la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{ax+b}}{a}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F : x \mapsto \dfrac{e^{2x+1}}{2} + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

On va calculer $F(\ln 3)$ en fonction de k.

$$\begin{aligned} F(\ln 3) &= \frac{e^{2\ln 3+1}}{2} + k \\ &= \frac{e^{2\ln 3} \times e}{2} + k \\ &= \frac{\left(e^{\ln 3}\right)^2 \times e}{2} + k \\ &= \frac{3^2 \times e}{2} + k \\ &= \frac{9e}{2} + k \end{aligned}$$

Pour le calcul de $e^{2\ln 3}$, on peut écrire $e^{2\ln 3} = \left(e^{\ln 3}\right)^2$ ou $e^{2\ln 3} = e^{\ln\left(3^2\right)} = e^{\ln 9}$ en utilisant les propriétés du logarithme népérien et de l'exponentielle.
Avec la calculatrice, on trouve aussi aisément le résultat sans effectuer ces transformations d'écriture qu'il est néanmoins indispensable de maîtriser.

On cherche k tel que $F(\ln 3) = 5e \quad (1)$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{9e}{2} + k = 5e \\ &\Leftrightarrow k = 5e - \frac{9e}{2} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{e}{2} \end{aligned}$$

La primitive cherchée est la fonction F : $x \mapsto \dfrac{e^{2x+1}+e}{2}$.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \cos x \times e^{\sin x} - \sin x \times e^{\cos x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression d'une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

$$G(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On effectue la réécriture $g(x) = \cos x \times e^{\sin x} + (-\sin x) \times e^{\cos x}$.

On peut donc écrire $g(x) = (\sin x)' \times e^{\sin x} + (\cos x)' \times e^{\cos x}$ (avec un abus de notations !).

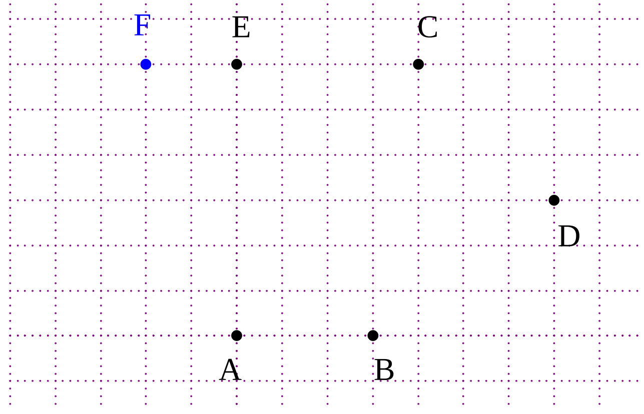
Ainsi, $g = u'e^u + v'e^v$ avec fonction $u : x \mapsto \sin x$ fonction $v : x \mapsto \cos x$.

Ainsi, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction $G = e^u + e^v$.

III.

On considère la figure ci-dessous qui représente un maillage du plan par des carrés de côté 1. Les points A, B, C, D, E sont des nœuds du maillage.
Placer le point F appartenant à la droite (CE) tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = -6$.

Calculer le produit scalaire $p = \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{CE}$.



$$p = 36$$

On calcule p en utilisant la méthode de projection orthogonale.

Dans les exercices **IV** et **V**, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

IV.

On note P le plan d'équation cartésienne $3x + y - z - 1 = 0$.

1°) Quelle est la cote du point A de P dont l'abscisse est égale à 5 et l'ordonnée est égale – 4 ?

10 (une seule réponse sans égalité)

$A \in P$ donc on a $3x_A + y_A - z_A - 1 = 0$.
Or $x_A = 5$ et $y_A = -4$.
On peut donc écrire $3 \times 5 - 4 - z_A - 1 = 0$, ce qui donne $10 - z_A = 0$ d'où $z_A = 10$.

2°) On considère les points $B(0;3;0)$ et $C(6;5;-2)$.

Démontrer que la droite (BC) est orthogonale au plan *P*.

Le vecteur $\vec{u}\,(3;1;-1)$ est un vecteur normal à *P*.

Or $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(6;2;-2)$.

On constate donc que $\overrightarrow{BC}=2\vec{u}$.

On en déduit que $\overrightarrow{BC}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et par conséquent, (BC) est orthogonale à *P*.

3°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de la droite (BC) et du plan *P*. On utilisera un système d'équations paramétriques de (BC).

$$I\left(-\frac{6}{11};\frac{31}{11};\frac{2}{11}\right)$$

$$(BC)\ \begin{cases} x=0+6t \\ y=3+2t \\ z=0-2t \end{cases}\ (t\in\mathbb{R}) \text{ soit } (BC)\ \begin{cases} x=6t \\ y=3+2t \\ z=-2t \end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$$

Pour déterminer les coordonnées du point I, on utilise l'équation cartésienne de *P* donnée dans l'énoncé $3x+y-z-1=0$ et on remplace *x*, *y*, *z*, par leurs expressions en fonction de *t* correspondant au système équations paramétriques de la droite (BC).

Le paramètre *t* du point I (paramètre de I sur la droite (BC)) vérifie l'égalité

$$3\times 6t+3+2t-(-2t)-1=0 \quad (1).$$

$$(1) \Leftrightarrow 18t+3+2t+2t-1=0$$

$$\Leftrightarrow 22t+2=0$$

$$\Leftrightarrow t=-\frac{1}{11}$$

$$I\left|\begin{array}{l} x_I=6\times\left(-\frac{1}{11}\right)=-\frac{6}{11} \\ y_I=3+2\times\left(-\frac{1}{11}\right)=\frac{31}{11} \\ z_I=-2\times\left(-\frac{1}{11}\right)=\frac{2}{11} \end{array}\right.$$

On peut aussi utiliser directement la calculatrice pour résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x+y-z-1=0 \\ x=6t \\ y=3+2t \\ z=-2t \end{cases}$$

V.

On donne les points $\mathrm{A}(2\,;-1\,;0)$, $\mathrm{B}(3\,;-1\,;2)$, $\mathrm{C}(0\,;4\,;1)$, $\mathrm{D}(2\,;5\,;0)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}\,(5\,;-2\,;-4)$.

1°) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur normal.

$$5x-2y-4z-12=0$$

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\in P &\Leftrightarrow \vec{u}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0 \\ &\Leftrightarrow 5\times(x-2)+(-2)\times(y+1)+(-4)\times z=0 \\ &\Leftrightarrow 5x-10-2y-2-4z=0 \\ &\Leftrightarrow 5x-2y-4z-12=0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de P s'écrit donc $5x-2y-4z-12=0$.

2°) Déterminer la distance du point B au plan P.

On applique la formule donnée par la propriété ci-dessous.

$P:\ ax+by+cz+d=0\quad \big((a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)\big)$

La distance du point $\mathrm{A}(x_0\,;y_0\,;z_0)$ au plan P est donnée par la formule :

$$\mathrm{d}(\mathrm{A},P)=\frac{|\,ax_0+by_0+cz_0+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathrm{B},P) &= \frac{|\,5x_\mathrm{B}-2y_\mathrm{B}-4z_\mathrm{B}-12\,|}{\sqrt{5^2+(-2)^2+(-4)^2}} \\ &= \frac{|\,5\times3-2\times(-1)-4\times2-12\,|}{\sqrt{25+4+16}} \\ &= \frac{|\,5\times3+2-8-12\,|}{\sqrt{45}} \\ &= \frac{|\,17-20\,|}{3\sqrt{5}} \\ &= \frac{3}{3\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

3°) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ normal au plan (ABC).

$$\vec{v}\,(-10\,;-5\,;5)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{vmatrix}1\\0\\2\end{vmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{vmatrix}-2\\5\\1\end{vmatrix}$

On applique la formule du cours permettant d'obtenir les coordonnées d'un vecteur orthogonal à deux autres vecteurs.

$$\vec{v}\begin{vmatrix}0\times1-2\times5=-10\\2\times(-2)-1\times1=-5\\1\times5-0\times(-2)=5\end{vmatrix}$$

En divisant les coordonnées par – 5, on peut aussi donner le vecteur $\vec{v}\,'(2\,;1\,;-1)$.

On peut utiliser la fonction « cross » de la calculatrice.

4°) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(1\,;0\,;2)$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\,(2\,;1\,;-1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{CD}}=1\times2+0\times1+2\times(-1)=2-2=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont orthogonaux et, par suite, les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.