T spé

Interrogation écrite du vendredi 25 mars 2022

30 minutes

Prénom et nom : ……………………………………………

Numéro : ……… **Note :** ………

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\ln x - 1)^2}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$.

1°) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers e.

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

2°) Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1^+.

…………………………………………………………………………………

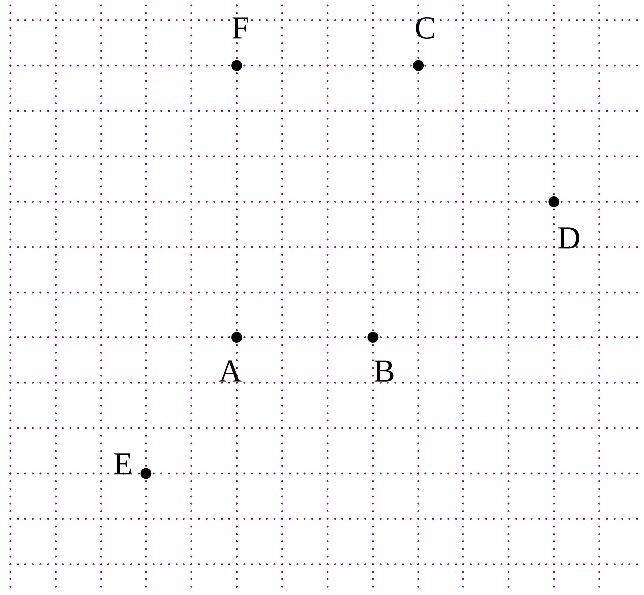
…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

II. (4 points)

On considère la figure ci-dessous qui représente un maillage du plan par des carrés de côté 1. Les points A, B, C, D, E, F sont des nœuds du maillage.
On note G le point appartenant à la droite (CD) tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AG}} = 9$.
Placer G sur la figure.

Calculer les produits scalaires suivants :
$p_1 = \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}}$, $p_2 = \overrightarrow{\mathrm{FC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FG}}$, $p_3 = \overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}$.
On pourra introduire des points.



$p_1 = $ …..
$p_2 = $ …..
$p_3 = $ …..

III. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x-1)^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Vérifier au brouillon que pour tout réel $x \neq 1$, on a $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

En déduire l'expression d'une primitive F de f sur l'intervalle $I =]1\,;+\infty[$.

…………………………………… (une seule égalité)

IV. (8 points : 2 points par primitive)

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On demande de donner l'expression d'une primitive F de f sur I.

$f(x)=$	I	$\mathrm{F}(x)=$
$\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	
$3x^2\left(x^3+1\right)^4$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{x-1}{x^2-2x}$	$]2\,;+\infty[$	
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4}{x^2}$	$]0\,;+\infty[$	

V. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{2x} - e^{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression de la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{F}(\ln 2) = 3$.

……………………………... (une seule égalité)

VI. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne le point $\mathrm{A}(3\,;5\,;2)$.

On note P le plan de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et P' le plan d'équation $z = -1$.

1°) Déterminer la distance de A au plan P.

………………….

2°) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur le plan P'.

………………….

Corrigé de l'interrogation écrite du 25-3-2022

I.

On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\ln x - 1)^2}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$.

1°) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers e.

On a $\lim\limits_{x \to \mathrm{e}} (\ln x - 1) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \mathrm{e}} (\ln x - 1)^2 = 0^+$ (il est essentiel de préciser 0^+ car cela sert juste après).

Par passage à l'inverse, on en déduit que $\lim\limits_{x \to \mathrm{e}} \dfrac{1}{(\ln x - 1)^2} = +\infty$ soit

$\lim\limits_{x \to \mathrm{e}} f(x) = +\infty$.

On peut aussi passer par une limite de composée.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \mathrm{e}} \underbrace{(\ln x - 1)}_{X} = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{1}{X^2} = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim\limits_{x \to \mathrm{e}} f(x) = +\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \mathrm{e}} \underbrace{(\ln x - 1)^2}_{X} = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{1}{X} = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim\limits_{x \to \mathrm{e}} f(x) = +\infty.$$

On vérifie le résultat de cette limite en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

2°) Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1^+.

On a $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{\ln x} = 0^+$ (il est essentiel de préciser 0^+ car cela sert juste après).

Par passage à l'inverse, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}} = +\infty$ soit

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = +\infty$.

On vérifie le résultat de cette limite en traçant la courbe représentative de g sur l'écran de la calculatrice.

II.

On considère la figure ci-dessous qui représente un maillage du plan par des carrés de côté 1. Les points A, B, C, D, E, F sont des nœuds du maillage.

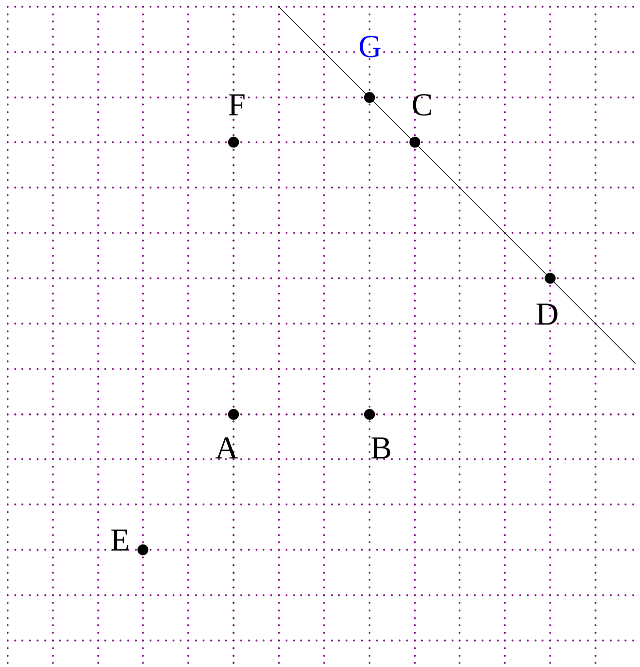
On note G le point appartenant à la droite (CD) tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AG}} = 9$.

Placer G sur la figure.

Calculer les produits scalaires suivants :

$p_1 = \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}}$, $p_2 = \overrightarrow{\mathrm{FC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FG}}$, $p_3 = \overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

On pourra introduire des points.



Soit H le projeté orthogonal de G sur (AB).

On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AH}}$.

Or $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AG}} = 9$ d'où $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AH}} = 9$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls.

Comme leur produit scalaire est strictement positif, on peut dire qu'ils sont de même sens.

On a donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AH} = 3\mathrm{AH}$.
On a donc $\mathrm{AH} = 3$.

On place donc H sur la demi-droite $[\mathrm{AB})$ tel que $\mathrm{AH} = 3$.

On observe que H est confondu avec B.

On trace la droite Δ, perpendiculaire à (AB) passant par B.

Le point G est le point d'intersection de Δ et de (CD) (cf. définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite).

$p_1 = -26$
$p_2 = 12$
$p_3 = -18$

● Pour p_1, on observe que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ sont colinéaires de sens contraires.
On peut donc écrire $p_1 = -\,\mathrm{AC} \times \mathrm{AE}$.
On doit ensuite calculer les distances AC et AE.
On utilise le fait que l'on a un maillage du plan par des carrés de côté 1.
Grâce au théorème de Pythagore, on obtient aisément $\mathrm{AC} = 2\sqrt{13}$ et $\mathrm{AE} = \sqrt{13}$ (les deux calculs sont $\mathrm{AC}^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52 = 4 \times 13$ et $\mathrm{AE}^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$).

On peut aussi se contenter de calculer AE et observer que $\mathrm{AC} = 2\mathrm{AE}$.

On achève le calcul :

$$
\begin{aligned}
p_1 &= -\,2\sqrt{13} \times \sqrt{13} \\
&= -\,2 \times 13 \\
&= -\,26
\end{aligned}
$$

● Pour p_2, on utilise une projection orthogonale sur la droite (CF) (seule méthode car on ne connaît pas la mesure de l'angle géométrique formé par les deux vecteurs).
On introduit le projeté orthogonal du point G sur (CF).

• Pour p_3, on utilise une projection orthogonale sur la droite (AF) (seule méthode car on ne connaît pas la mesure de l'angle géométrique formé par les deux vecteurs).

Le projeté orthogonal de C sur la droite (AF) est F.

On note D' le projeté orthogonal de D sur la droite (AF).

$$p_3 = \overrightarrow{\mathrm{AF}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{AF}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{FD'}}$$

$$= -\,\mathrm{AF} \times \mathrm{FD}'$$

$$= -\,6 \times 3$$

$$= -18$$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x-1)^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Vérifier au brouillon que pour tout réel $x \neq 1$, on a $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

En déduire l'expression d'une primitive F de f sur l'intervalle $I =]1 \,;+\infty[$.

$$\mathrm{F}(x) = \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On pose $u(x) = x-1$. On a alors $u'(x) = 1$.

On peut écrire $f = \dfrac{u'}{u} + \dfrac{u'}{u^2}$.

Une primitive de F sur I est donc la fonction $\mathrm{F} = \ln|\,u\,| - \dfrac{1}{u}$.

On peut donc écrire $\forall x \in I \quad \mathrm{F}(x) = \ln|\,x-1\,| - \dfrac{1}{x-1}$.

Or $\forall x \in I \quad x-1 > 0$ donc $|\,x-1\,| = x-1$.

Les barres de valeur absolue peuvent donc être remplacées par des parenthèses :

$\forall x \in I \quad \mathrm{F}(x) = \ln(x-1) - \dfrac{1}{x-1}$.

IV.

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f* définie sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$.

On demande de donner l'expression d'une primitive F de *f* sur *I*.

$f(x) =$	I	$\mathrm{F}(x) =$
$\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	$2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$
$3x^2(x^3+1)^4$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{(x^3+1)^5}{5}$
$\dfrac{x-1}{x^2-2x}$	$]2\,;+\infty[$	$\dfrac{1}{2}\ln(x^2-2x)$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4}{x^2}$	$]0\,;+\infty[$	$\sqrt{x} + \dfrac{4}{x}$

• $f : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

On effectue la réécriture $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}}$.

On pense ensuite à la forme $u'e^{u}$.

On pose $u(x) = \sqrt{x}$. On a alors $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

On peut écrire $f = 2 \times u' \times e^{u}$ (on a une constante d'ajustement).

• $f : x \mapsto 3x^2 (x^3 + 1)^4$

On pense à la forme $u'u^n$.

On pose $u(x) = x^3 + 1$. On a alors $u'(x) = 3x^2 + 1$.

On peut écrire $f = u' \times u^4$ (on a une constante d'ajustement).

• $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2 - 2x}$

On pense à la forme $\dfrac{u'}{u}$.

On pose $u(x) = x^2 - 2x$. On a alors $u'(x) = 2x - 2$.

On peut écrire $f = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u}$ (on a une constante d'ajustement).

Une primitive de F sur I est donc la fonction $F = \dfrac{1}{2} \ln |u|$.

On peut donc écrire $\forall x \in I \quad F(x) = \dfrac{1}{2} \ln | x^2 - 2x |$.

Or $\forall x \in I \quad x^2 - 2x > 0$ (visible sur la forme factorisée $x^2 - 2x = x(x-2)$) donc $| x^2 - 2x | = x^2 - 2x$.

Les barres de valeur absolue peuvent donc être remplacées par des parenthèses :

$\forall x \in I \quad F(x) = \dfrac{1}{2} \ln (x^2 - 2x)$.

• $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4}{x^2}$

On effectue la réécriture $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2} \right)$.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{2x} - e^{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression de la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(\ln 2) = 3$.

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{2} - e^{x} + 3 \quad \text{(une seule égalité)}$$

On sait qu'une primitive de la fonction $x \mapsto e^{ax}$ (a étant un réel non nul) est la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{ax}}{a}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{2} - e^{x} + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

On va calculer $F(\ln 2)$ en fonction de k.

$$\begin{aligned} F(\ln 2) &= \frac{e^{2\ln 2}}{2} - e^{\ln 2} + k \\ &= \frac{(e^{\ln 2})^2}{2} - e^{\ln 2} + k \\ &= \frac{2^2}{2} - 2 + k \\ &= 2 - 2 + k \\ &= k \end{aligned}$$

Pour le calcul de $\mathrm{e}^{2\ln 2}$, on peut écrire $\mathrm{e}^{2\ln 2}=\left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^2$ ou $\mathrm{e}^{2\ln 2}=\mathrm{e}^{\ln\left(2^2\right)}=\mathrm{e}^{\ln 4}$ en utilisant les propriétés du logarithme népérien et de l'exponentielle.
Avec la calculatrice, on trouve aussi aisément le résultat sans effectuer ces transformations d'écriture qu'il est néanmoins indispensable de maîtriser.

On cherche k tel que $\mathrm{F}(\ln 2)=3 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow k=3$

La primitive cherchée est la fonction F : $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}-\mathrm{e}^x+3$.

Il est possible d'écrire $\mathrm{F}(x)=\dfrac{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2+5}{2}$ (forme canonique).

VI.

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne le point $\mathrm{A}(3\,;5\,;2)$.
On note P le plan de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et P' le plan d'équation $z=-1$.

Il est conseillé de représenter le repère en perspective.

1°) Déterminer la distance de A au plan P.

$$\mathrm{d}(\mathrm{A}\,;P)=2$$

Il n'y a pas de calcul à faire.
On peut utiliser un graphique.

2°) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur le plan P'.

$$\mathrm{H}(3\,;5\,;-1)$$

Il n'y a pas de calcul à faire.
On peut utiliser un graphique.