T spé

Interrogation écrite du vendredi 18 mars 2022

30 minutes

Prénom et nom : ……………………………………………

Numéro : ………

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\ln x)^2}$.

Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \ln x$.

Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0^+.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

II. (2 points)

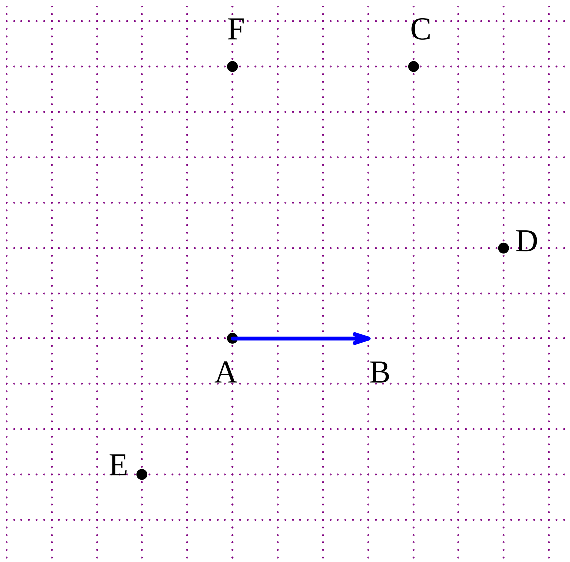
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.

Compléter l'égalité suivante après calcul au brouillon.

$$\left(\vec{u} - 2\vec{v}\right)^2 = \ldots\ldots$$

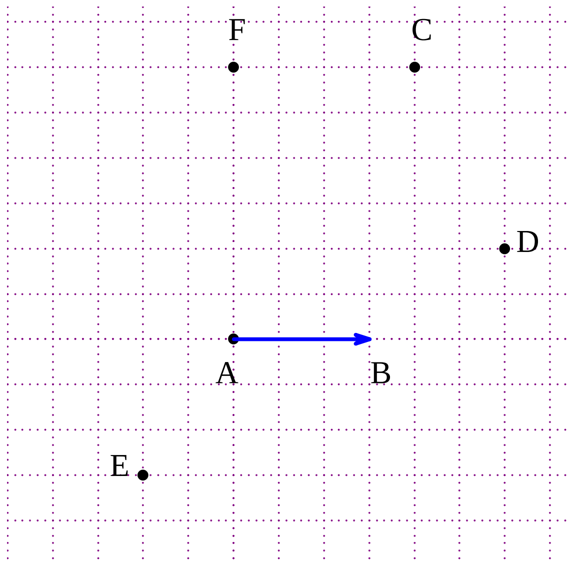
III. (5 points : 1°) 4 points ; 2°) 1 point)

On considère la figure ci-dessous où A, B, C, D, E, F sont des points du plan.
On donne $AB = 3$.
1°) Placer les points G, H, I, J, projetés orthogonaux respectifs des points C, D, E, F sur la droite (AB).
Calculer les produits scalaires suivants :
$p_1 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $p_2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$, $p_3 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$, $p_4 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF}$.



$p_1 = \ldots.$	$p_2 = \ldots.$	$p_3 = \ldots.$	$p_4 = \ldots.$

2°) Placer sur la figure le point K de (CD) tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AK}} = 15$.



IV. (3 points)

Soit ABCDEFGH un cube d'arête *a* (*a* étant un réel strictement positif).
On note O le centre de la face BCGF.

Calculer les produits scalaires $p_1 = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AH}}$, $p_2 = \overrightarrow{\mathrm{AO}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $p_3 = \overrightarrow{\mathrm{AO}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ en fonction de *a*.

$p_1 = ...$
$p_2 = ...$
$p_3 = ...$

V. (4 points

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$ tels que B et C ne soient pas confondus. On note I et J les milieux respectifs de $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{AC}]$.

On note F l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que
$\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = 0$.
Compléter les lignes en pointillés ci-dessous par des égalités de produits scalaires puis conclure.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

$$\mathrm{M} \in F \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

L'ensemble F est ....

VI. (2 points)

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre $\mathrm{A}(0\,;3\,;4)$ tangente au plan $(x\mathrm{O}y)$.

....

Corrigé de l'interrogation écrite du 18-3-2022

I.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\ln x)^2}$.

Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.

On sait que $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 1} (\ln x)^2 = 0^+$ (il est important de préciser 0^+ car cela sert juste après).

Par passage à l'inverse, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(\ln x)^2} = +\infty$ soit $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$

On peut aussi passer par une limite de composée.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} \underbrace{\ln x}_{X} = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{1}{X^2} = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty .$$

On vérifie le résultat de cette limite en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \ln x$.

Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0^+.

Il n'y a pas de forme indéterminée.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc, par limite d'un produit, } \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty .$$

On vérifie le résultat de cette limite en traçant la courbe représentative de g sur l'écran de la calculatrice.

II.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que $\left\| \vec{u} \right\| = \sqrt{2}$, $\left\| \vec{v} \right\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.

Compléter l'égalité suivante après calcul au brouillon.

$$\left(\vec{u} - 2\vec{v}\right)^2 = 90$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{u} - 2\vec{v}\right)^2 &= \vec{u}^2 - 2\left[\vec{u} \cdot \left(2\vec{u}\right)\right] + \left(2\vec{v}\right)^2 \\ &= \vec{u}^2 - 2 \times 2\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + 4\vec{v}^2 \\ &= \left\| \vec{u} \right\|^2 - 4\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + 4\left\| \vec{v} \right\|^2 \\ &= 2 - 4 \times 3 + 4 \times 25 \\ &= 2 - 12 + 100 \\ &= 90 \end{aligned}$$

On développe le carré scalaire en utilisant l'identité remarquable scalaire $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + \vec{v}^2$ ou $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + \vec{v}^2$.

On peut aussi appliquer directement la deuxième des deux égalités de développement suivantes où a et b sont des réels :

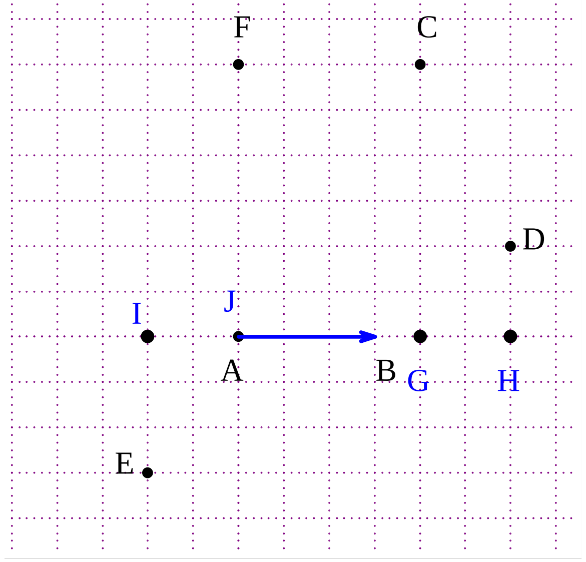
$\left(a\vec{u} + b\vec{v}\right)^2 = a^2\vec{u}^2 + 2ab\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + b^2\vec{v}^2$;

$\left(a\vec{u} - b\vec{v}\right)^2 = a^2\vec{u}^2 - 2ab\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + b^2\vec{v}^2$.

III.

On considère la figure ci-dessous où A, B, C, D, E, F sont des points du plan.
On donne $AB = 3$.
1°) Placer les points G, H, I, J, projetés orthogonaux respectifs des points C, D, E, F sur la droite (AB).

Calculer les produits scalaires suivants :
$p_1 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD}$, $p_2 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AE}$, $p_3 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AF}$, $p_4 = \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BF}$.



On constate que J est confondu avec A.

$p_1 = 6$	$p_2 = -6$	$p_3 = 0$	$p_4 = 9$

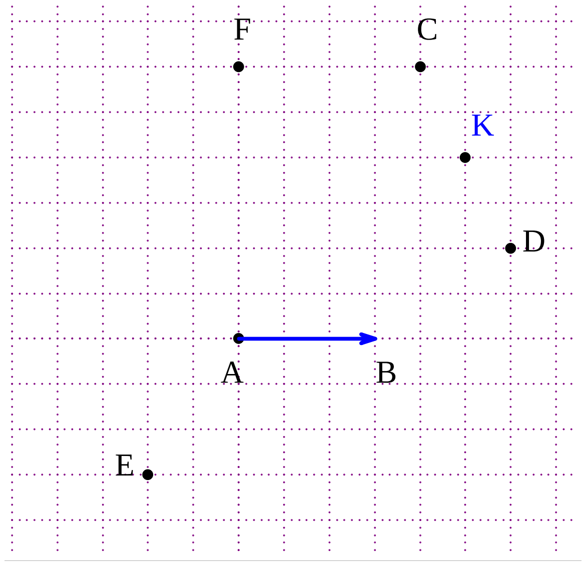
$$\begin{aligned} p_1 &= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{GH} \\ &= AB \times GH \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AI} \\ &= -AB \times AI \\ &= -3 \times 2 \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 &= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AF} \\ &= 0 \text{ car } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AF} \text{ sont orthogonaux} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4 &= \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BF} \\ &= \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BJ} \\ &= \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{BA}^2 \\ &= BA^2 \\ &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

2°) Placer sur la figure le point K de (CD) tel que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AK} = 15$.



Soit L le projeté orthogonal de K sur (AB).

On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AK}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AL}}$.

Or $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AK}} = 15$ d'où $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AL}} = 15$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AL}}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls.

Comme leur produit scalaire est strictement positif, on peut dire qu'ils sont de même sens.

On a donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AL}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AL} = 3\mathrm{AL}$.
On a don $\mathrm{AL} = 5$.

On place donc L sur la demi-droite $[\mathrm{AB})$ tel que $\mathrm{AL} = 5$.

On trace la droite Δ, perpendiculaire à (AB) passant par L

Le point K est le point d'intersection de Δ et de (CD) (cf. définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite).

On observe que K est le milieu de $[\mathrm{CD}]$.

IV.

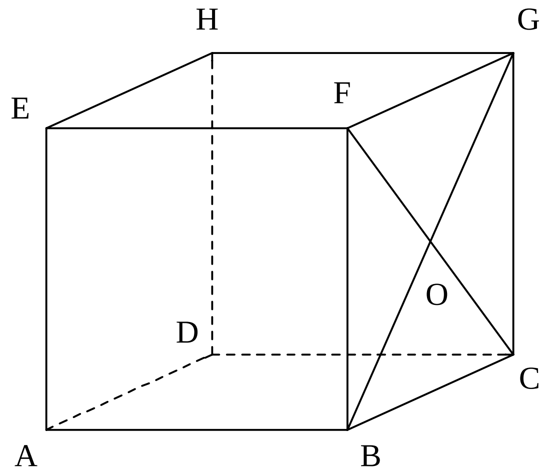
Soit ABCDEFGH un cube d'arête a (a étant un réel strictement positif).
On note O le centre de la face BCGF.

Calculer les produits scalaires $p_1 = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AH}}$, $p_2 = \overrightarrow{\mathrm{AO}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $p_3 = \overrightarrow{\mathrm{AO}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ en fonction de a.

$$\boxed{p_1 = -a^2}$$

$$\boxed{p_2 = a^2}$$

$$\boxed{p_3 = a^2}$$



On utilise à plusieurs reprise la propriété sur la diagonale d'un carré de côté a : $a\sqrt{2}$ qui se démontre facilement en utilisant le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned}
p_1 &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AH}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BG}} \\
&= -\,\mathrm{OB} \times \mathrm{BG} \\
&= -\frac{a\sqrt{2}}{2} \times a\sqrt{2} \\
&= -\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2}{2} \\
&= -\frac{2a^2}{2} \\
&= -\,a^2
\end{aligned}$$

$p_2 = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ car B est le projeté orthogonal de O sur (AB)

$= \overrightarrow{AB}^2$

$= a^2$

$p_3 = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AH}$

$= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BG}$

$= \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BG}$ car A se projette orthogonalement en B sur (BG) et O se projette orthogonalement en O sur (BG)

$= BO \times BG$

$= \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \times a\sqrt{2}$

$= \dfrac{\left(a\sqrt{2}\right)^2}{2}$

$= \dfrac{2a^2}{2}$

$= a^2$

V.

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$ tels que B et C ne soient pas confondus. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

On note F l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$.

Compléter les lignes en pointillés ci-dessous par des égalités de produits scalaires puis conclure.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} M \in F &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{MI}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{MJ}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0 \end{aligned}$$

Comme B et C ne sont pas confondus, I et J ne sont pas confondus (raisonnement par l'absurde).
L'ensemble F est la sphère de diamètre $[IJ]$.

- On ne développe pas $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right)$.
- On réduit les expressions vectorielles $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$ en utilisant les milieux (propriété du cours qui se redémontre aisément avec la relation de Chasles).

VI.

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre $\mathrm{A}(0\,;3\,;4)$ tangente au plan $(x\mathrm{O}y)$.

$$x^2+y^2+z^2-6y-8z+9=0$$

Comme S a pour centre A et est tangente au plan $(x\mathrm{O}y)$, son rayon est égale à la distance de A au plan $(x\mathrm{O}y)$.

Rappel :

La distance d'un point à un plan est la distance entre ce point et son projeté orthogonal sur le plan.

On a une propriété qui dit que c'est la plus petite distance entre ce point et un point quelconque du plan.

Dans un repère orthonormé, on sait que la distance d'un point au plan $(x\mathrm{O}y)$ est égale à la valeur absolue de sa cote.

Il n'y a pas de calcul à faire.

On peut écrire $\mathrm{d}\left(\mathrm{A}, (x\mathrm{O}y)\right)=|\ z_{\mathrm{A}}\ |=|\ 4\ |=4$.

On peut éventuellement faire un graphique en perspective sur lequel on place le point A et son projeté orthogonal $\mathrm{H}(0\,;3\,;0)$.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\in S &\Leftrightarrow \mathrm{AM}^2=4^2\\
&\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16\\
&\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2-6y+9+z^2-8z+16=16\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6y-8z+9=0
\end{aligned}$$

On en déduit que S a pour équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-6y-8z+9=0$.

Une équation cartésienne de sphère se présente sous la forme
$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ où a, b, c, d sont des réels