T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 4 février 2022

Durée : 30 minutes
Calculatrice autorisée
Fiche autorisée

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère un parallélépipède ABCDEFGH dans l'espace $\mathcal{E}$.

1°) Dans cette question, on rapporte $\mathcal{E}$ au repère $\mathcal{R} = \left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

• On note I le symétrique de A par rapport à B. Quelles sont les coordonnées de I dans $\mathcal{R}$? ……………………..

• Quel est l'ensemble *P* des points de $\mathcal{E}$ dont la cote est égale à 1 ?

………………… (une seule égalité)

2°) Dans quel repère le point F a-t-il pour coordonnées $(1\,;1\,;1)$?
Entourer la réponse choisie et justifier par une égalité vectorielle sur les pointillés en dessous.

$\left(\text{C}, \overrightarrow{\text{CD}}, \overrightarrow{\text{CB}}, \overrightarrow{\text{CG}}\right)$ $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$ $\left(\text{D}, \overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DH}}\right)$

……………………

II. (8 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point ; 6°) 1 point)

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $\text{A}(2\,;0\,;1)$, $\text{B}(-1\,;0\,;1)$, $\text{C}(3\,;-1\,;2)$, $\text{D}(0\,;0\,;-2)$, $\text{E}(2\,;1\,;1)$, $\text{F}(0\,;1\,;5)$. On pose $\vec{u} = 2\vec{k} - \vec{i}$.

1°) Quelles sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$? ……………. (une seule réponse)

2°) Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{\text{AB}}$ ……………… $\overrightarrow{\text{CD}}$ ……………… $\overrightarrow{\text{EF}}$ ………………

3°) Quelle droite admet le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur ? Entourer la droite choisie et justifier sur la ligne en dessous.

(AB) (CD) (EF)

……………………………………………………………………………………………………..

4°) L'une des droites est parallèle à l'un des axes du repère. Préciser laquelle.

(AB) (CD) (EF)

5°) On note P le plan d'équation $z=2$.
Quelles sont les coordonnées du point d'intersection G de P et de l'axe (Oz) ? …………..…

6°) Quelles sont les coordonnées du milieu I de $[EF]$? ……..……..

III. (8 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto (x+3)e^{-x} + x + 1$.
On admet sans démonstration que pour tout réel x on a $f'(x) = 1-(x+2)e^{-x}$ et $f''(x) = (x+1)e^{-x}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Étudier la convexité de f.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

2°) Justifier que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion A dont on donnera l'abscisse.
Calculer l'ordonnée de A et le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ en ce point (valeur exacte dans les deux cas).

………..

………..

3°) On admet que f admet un minimum sur l'intervalle $[0 ; 4]$ atteint en un réel x_0.
Tracer $\mathcal{C}$ sur l'écran de la calculatrice et déterminer grâce à la commande de la calculatrice les valeurs arrondies au millième de x_0 et de $f(x_0)$. On répondra sans égalité.

………   ………

Corrigé de l'interrogation écrite du 4-2-2022

I.

On considère un parallélépipède ABCDEFGH dans l'espace $\mathcal{E}$.

1°) Dans cette question, on rapporte $\mathcal{E}$ au repère $\mathcal{R} = \left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

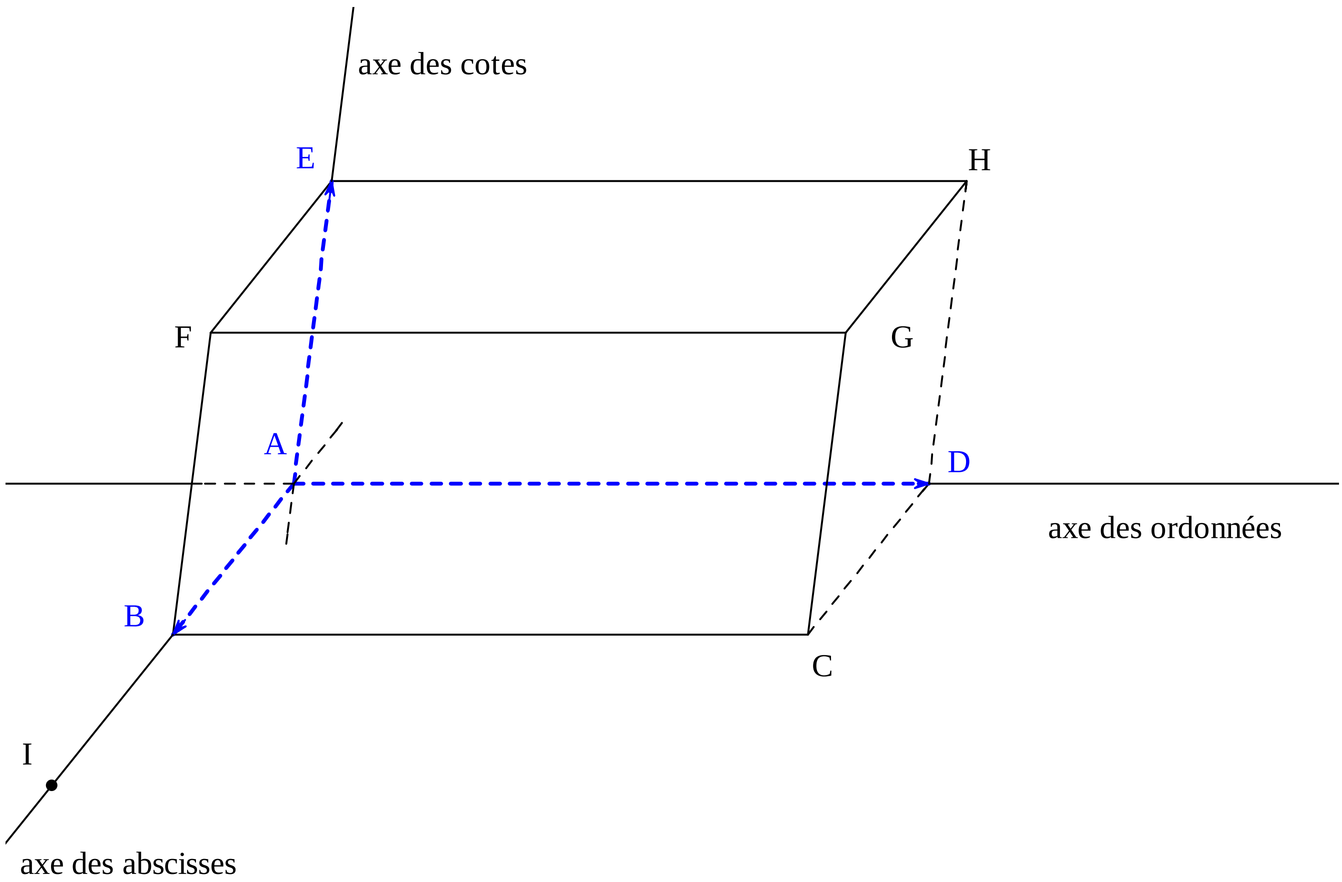
• On note I le symétrique de A par rapport à B. Quelles sont les coordonnées de I dans $\mathcal{R}$? $(2\,;0\,;0)$

On a $\overrightarrow{\text{AI}} = 2\overrightarrow{\text{AB}}$ donc $\overrightarrow{\text{AI}} = 2\overrightarrow{\text{AB}} + 0\overrightarrow{\text{AD}} + 0\overrightarrow{\text{AE}}$.

• Quel est l'ensemble P des points de $\mathcal{E}$ dont la cote est égale à 1 ?

$$P = (\text{EFG}) \quad \text{(une seule égalité)}$$

P est le plan contenant les points E, F, G, H.
Un plan se note par trois non alignés entre parenthèses.



2°) Dans quel repère le point F a-t-il pour coordonnées $(1\,;1\,;1)$?
Entourer la réponse choisie et justifier par une égalité vectorielle sur les pointillés en dessous.

$\left(\text{C}, \overrightarrow{\text{CD}}, \overrightarrow{\text{CB}}, \overrightarrow{\text{CG}}\right)$ $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$ $\left(\text{D}, \overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DH}}\right)$

On a $\overrightarrow{\text{DF}} = \overrightarrow{\text{DC}} + \overrightarrow{\text{DA}} + \overrightarrow{\text{DH}}$ (égalité du parallélépipède) soit $\overrightarrow{\text{DF}} = 1\overrightarrow{\text{DC}} + 1\overrightarrow{\text{DA}} + 1\overrightarrow{\text{DH}}$.

II.

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $\mathrm{A}(2\,;0\,;1)$, $\mathrm{B}(-1\,;0\,;1)$, $\mathrm{C}(3\,;-1\,;2)$, $\mathrm{D}(0\,;0\,;-2)$, $\mathrm{E}(2\,;1\,;1)$, $\mathrm{F}(0\,;1\,;5)$. On pose $\vec{u}=2\vec{k}-\vec{i}$.

1°) Quelles sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$? $(-1\,;0\,;2)$ (une seule réponse)

2°) Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(-3\,;0\,;0)$ $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\,(-3\,;1\,;-4)$ $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\,(-2\,;0\,;4)$

3°) Quelle droite admet le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur ? Entourer la droite choisie et justifier sur la ligne en dessous.

(AB) (CD) (EF)

D'après les coordonnées, on a $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=2\vec{u}$.
On peut donc dire que $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$. C'est donc un vecteur directeur de (EF).

4°) L'une des droites est parallèle à l'un des axes du repère. Préciser laquelle.

(AB) (CD) (EF)

5°) On note P le plan d'équation $z=2$.
Quelles sont les coordonnées du point d'intersection G de P et de l'axe (Oz) ? $(0\,;0\,;2)$

6°) Quelles sont les coordonnées du milieu I de [EF] ? $(1\,;1\,;3)$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto (x+3)\mathrm{e}^{-x}+x+1$.
On admet sans démonstration que pour tout réel x on a $f'(x)=1-(x+2)\mathrm{e}^{-x}$ et $f''(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Étudier la convexité de f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$	
Signe de e^{-x}		$+$		$+$	
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

f est concave sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-1\right]$.

f est convexe sur l'intervalle $\left[-1\,;+\infty\right[$.

2°) Justifier que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion A dont on donnera l'abscisse.
Calculer l'ordonnée de A et le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ en ce point (valeur exacte dans les deux cas).

On a les conditions suivantes :

C_1 : f'' s'annule pour $x=-1$;

C_2 : f'' change de signe pour $x=-1$.

$\mathcal{C}$ admet donc le point A d'abscisse – 1 pour point d'inflexion.

L'ordonnée de A est égale à $f(-1)=(-1+3)\mathrm{e}^{-(-1)}-1+1=2\mathrm{e}$.

Le coefficient directeur de T est $f'(-1)=1-(-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)}=1-\mathrm{e}$.

3°) On admet que f admet un minimum sur l'intervalle $[0\,;4]$ atteint en un réel x_0.
Tracer $\mathcal{C}$ sur l'écran de la calculatrice et déterminer grâce à la commande de la calculatrice les valeurs arrondies au millième de x_0 et de $f(x_0)$. On répondra sans égalité.

1,146 3,464