T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 21 janvier 2022

Durée : 40 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….……………………………….

Note : ….. / 20

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$. On note I le milieu de $[\mathrm{AB}]$.

À tout point M de $\mathcal{E}$ on associe les vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ et $\vec{v}=2\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}-3\overrightarrow{\mathrm{MC}}$.

1°) Exprimer plus simplement le vecteur $\vec{u}$. ……………………………

On écrira une seule égalité sur les pointillés à droite.

2°) Démontrer que $\vec{v}$ est un vecteur constant indépendant de M que l'on exprimera comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

………..

………..

………..

3°) On suppose que $\mathrm{A}\neq\mathrm{C}$. Déterminer l'ensemble *F* des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

On rédigera sous la forme d'une « chaîne d'équivalences » (2 équivalences) puis on écrira une phrase de conclusion (« *F* est …. »).

………..

………..

………..

………..

II. (2 points)

Soit ABCDEFGH un « vrai » parallélépipède de l'espace $\mathcal{E}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ sont-ils coplanaires ?

Répondre sans justifier par oui ou non sur les pointillés ci-contre. …..

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. ……………………………………….

III. (8 points)

$f : x \mapsto x^2 - \ln x$ définie sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Vérifier sur la calculatrice.	
$f : x \mapsto 3 - \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.	
$f : x \mapsto 2 + 3\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.	
$f : x \mapsto \dfrac{1-2x^2}{x^2 - x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.	

IV. (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ définie sur $]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

- Faire ci-contre, sans justifier, le tableau de signes de $\ln x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- À l'aide de ce tableau, déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

……

- Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. ……………………………………………………………………………

- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. ……………………………………………………………………………

- On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Justifier que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et une asymptote verticale (rédiger deux phrases).

……

……

Corrigé de l'interrogation écrite du 21-1-2022

I.

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$. On note I le milieu de $[\mathrm{AB}]$.
À tout point M de $\mathcal{E}$ on associe les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 3\overrightarrow{\mathrm{MC}}$.
1°) Exprimer plus simplement le vecteur $\vec{u}$.
On écrira une seule égalité sur les pointillés à droite.

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E} \quad \vec{u} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$$

Il s'agit d'une propriété du cours qui se démontre aisément à l'aide de la relation de Chasles.

2°) Démontrer que $\vec{v}$ est un vecteur constant indépendant de M que l'on exprimera comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E} \quad \vec{v} = 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 3\overrightarrow{\mathrm{MC}}$

$= 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) - 3\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ (relation de Chasles)

$= 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} - 3\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{AB}} - 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

3°) On suppose que $\mathrm{A} \neq \mathrm{C}$. Déterminer l'ensemble F des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
On rédigera sous la forme d'une « chaîne d'équivalences » (2 équivalences) puis on écrira une phrase de conclusion (« F est …. »).

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

$\mathrm{M} \in F \Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MI}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

F est la droite passant par I parallèle à (AC).

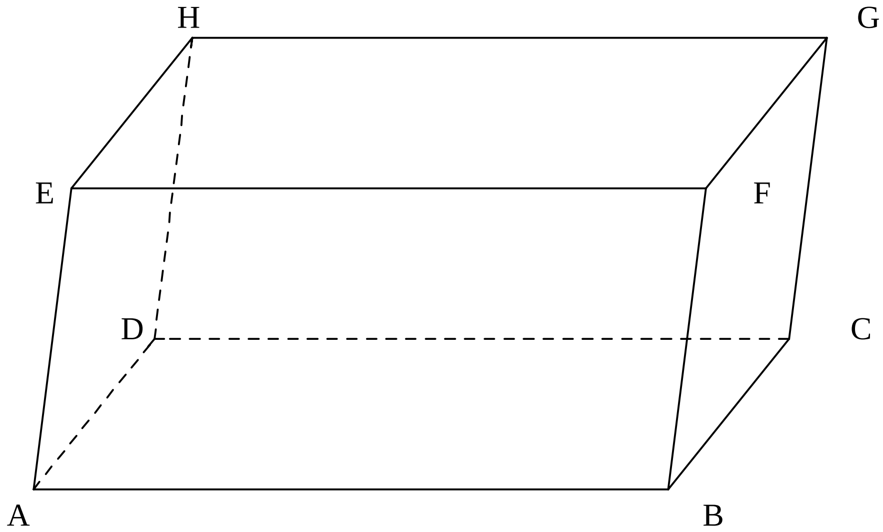
On peut faire une figure.

Il n'est pas utile d'introduire un coefficient de colinéarité.

II.

Soit ABCDEFGH un « vrai » parallélépipède de l'espace $\mathcal{E}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ sont-ils coplanaires ?
Répondre sans justifier par oui ou non sur les pointillés ci-contre. non



Les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG}$ ont tous la même origine A.
Par ailleurs, les points A, B, D, G ne sont pas coplanaires.
Donc d'après une propriété du cours, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CG}$ comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs.

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles sous forme soustractive en introduisant le point A)

$= \overrightarrow{AG} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

$= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

Autre méthode :

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG}$ (relation de Chasles)

$= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AG}$

III.

$f : x \mapsto x^2 - \ln x$ définie sur $]0\,;+\infty[$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Vérifier sur la calculatrice.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (-\ln x) = +\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. On peut vérifier (« visualiser ») cette limite en traçant la représentation graphique de *f* sur la calculatrice. On ne voit cependant pas très bien qu'elle admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.
$f : x \mapsto 3 - \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$. On peut vérifier (« visualiser ») cette limite en traçant la représentation graphique de *f* sur la calculatrice. On voit très bien qu'elle admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.
$f : x \mapsto 2 + 3e^x$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} (2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (3e^x) = 0\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$. On peut vérifier (« visualiser ») cette limite en traçant la représentation graphique de *f* sur la calculatrice. On voit très bien qu'elle admet la droite d'équation $y = 2$ pour asymptote horizontale en $-\infty$.
$f : x \mapsto \dfrac{1 - 2x^2}{x^2 - x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.	*f* est une fonction rationnelle non nulle donc on peut appliquer la règle des monômes de plus haut degré. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2) = -2$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2) = -2$ On vérifie le résultat grâce à la calculatrice graphique.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ définie sur $]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

● Faire ci-contre, sans justifier, le tableau de signes de $\ln x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

● À l'aide de ce tableau, déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

On a $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

• Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

• Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

• On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Justifier que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et une asymptote verticale (rédiger deux phrases).

On a trouvé $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 0$ c'est-à-dire l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$.

On a trouvé $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.
On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = 1$ pour asymptote verticale.

On vérifie ces deux résultats sur la calculatrice.

Version de rattrapage

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$. On note I le milieu de $[\mathrm{AB}]$.

À tout point M de $\mathcal{E}$ on associe les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 5\overrightarrow{\mathrm{MC}}$.

1°) Exprimer plus simplement le vecteur $\vec{u}$. ……………………………
On écrira une seule égalité sur les pointillés à droite.

2°) Démontrer que $\vec{v}$ est un vecteur constant indépendant de M que l'on exprimera comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

……

……

……

3°) On suppose que $\mathrm{A} \neq \mathrm{C}$. Déterminer l'ensemble *F* des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
On rédigera sous la forme d'une « chaîne d'équivalences » (2 équivalences) puis on écrira une phrase de conclusion (« *F* est …. »).

……

……

……

……

II. (2 points)

Soit ABCDEFGH un « vrai » parallélépipède de l'espace $\mathcal{E}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ sont-ils coplanaires ?
Répondre sans justifier par oui ou non sur les pointillés ci-contre. …..

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. ……………………………………….

III. (2 points)

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et λ un réel.
Compléter l'égalité : $\left\| \lambda \vec{u} \right\| =$ ....

IV. (10 points : 2 points par limite)

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[x - (\ln x)^2 \right]$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{e^x + 1}$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x}{1 - x^2}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 + \ln x}{x}$, $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\ln x}{\sqrt{2 - x}}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Corrigé de la version de rattrapage

I.

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$. On note I le milieu de $[\mathrm{AB}]$.
À tout point M de $\mathcal{E}$ on associe les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 5\overrightarrow{\mathrm{MC}}$.

1°) Exprimer plus simplement le vecteur $\vec{u}$. $\quad$ $\vec{u} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$
On écrira une seule égalité sur les pointillés à droite.

2°) Démontrer que $\vec{v}$ est un vecteur constant indépendant de M que l'on exprimera comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E} \quad \vec{v} = 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 5\overrightarrow{\mathrm{MC}}$$

$$= 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 3\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) - 5\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \quad \text{(relation de Chasles)}$$

$$= 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 5\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 5\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$= 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 5\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

3°) On suppose que $\mathrm{A} \neq \mathrm{C}$. Déterminer l'ensemble *F* des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
On rédigera sous la forme d'une « chaîne d'équivalences » (2 équivalences) puis on écrira une phrase de conclusion (« *F* est …. »).

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

$\mathrm{M} \in F \Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MI}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

F est la droite passant par I parallèle à (AC).

On peut faire une figure.

Il n'est pas utile d'introduire un coefficient de colinéarité.

II.

Soit ABCDEFGH un « vrai » parallélépipède de l'espace $\mathcal{E}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ sont-ils coplanaires ?
Répondre sans justifier par oui ou non sur les pointillés ci-contre. $\quad$ non

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{BH}} = -2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AG}}$

On peut aussi écrire $\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{AG}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

III.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et λ un réel.

Compléter l'égalité : $\|\lambda\vec{u}\| = |\ x\ | \times \|\vec{u}\|$.

IV.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[x - (\ln x)^2\right]$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{e^x + 1}$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x}{1 - x^2}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 + \ln x}{x}$, $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\ln x}{\sqrt{2 - x}}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une différence } \lim\limits_{x \to 0^+} \left[x - (\ln x)^2\right] = -\infty\,.$$

On peut vérifier (« visualiser ») cette limite en traçant la représentation graphique de *f* sur la calculatrice.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x + 1\right) = 1\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 3\,.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^+} (2x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \left(1 - x^2\right) = 0^-\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x}{1 - x^2} = -\infty\,.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \ln x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1 + \ln x}{x} = +\infty\,.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} \ln x = \ln 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{2 - x} = 0^+\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\ln x}{\sqrt{2 - x}} = +\infty\,.$$