T exp

Interrogation écrite du lundi 13 décembre 2021 (20 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………….………………………………….

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{Z}$ par $f(n)=\dfrac{n}{3}$ si *n* est divisible par 3 et $f(n)=n^2$ si *n* n'est pas divisible par 3. Exemples : $f(12)=4$; $f(7)=49$.

1°) Quels sont les antécédents de 25 par *f* ? ……………….……..

2°) L'affirmation « Tout entier relatif admet au moins un antécédent par *f* » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

II. (3 points)

Soit *n* un entier relatif impair. On pose $n=2p+1$ avec *p* entier relatif.

Exprimer $n'=5n$ en fonction de *p*.

En déduire le chiffre des unités de l'écriture en base dix de n'.

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

III. (3 points)

On note E l'ensemble des nombres premiers de la forme $n!+1$ avec *n* entier naturel.

Par exemple, $3\in\text{E}$ car $3=2!+1$.

Donner sans justifier deux autres éléments de E.

…. ….

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….……………………………….

IV. (2 points)

Déterminer les nombres premiers compris entre 10 et 100 dont la somme des chiffres de leur écriture en base dix est égale à 7.

…….……….

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On pose $\mathrm{A}=\overline{25x}$ et $\mathrm{B}=\overline{5y5}$ où x et y des entiers naturels compris entre 0 et 9.

1°) Déterminer x pour que A soit divisible par 3 et par 5. Aucune justification n'est attendue. …..

2°) Déterminer y pour que B soit divisible par 9. Aucune justification n'est attendue. …..

3°) On suppose que x et y ont les valeurs trouvées précédemment.

Déterminer l'écriture irréductible de la fraction $\mathrm{C}=\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$.

…………… (une seule égalité)

VI. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) Soit x et y deux entiers relatifs.

On suppose que x et y sont pairs. Dans ce cas, x et y sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

………

………

………

………

2°) Parmi les deux implications suivantes, laquelle est vraie ? Cocher l'implication choisie.

☐ Si deux entiers relatifs sont premiers entre eux, alors ils sont tous les deux impairs.

☐ Si deux entiers relatifs sont premiers entre eux, alors l'un au moins est impair.

VII. (2 points)

On pose $\mathrm{E}=[\![1\,;4]\!]$ et $\mathrm{F}=[\![1\,;4]\!]^2$.

On rappelle que F est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ où x et y sont des éléments de E.

Quels sont les éléments de F qui sont formés d'entiers non premiers entre eux ?

…….…………………….……..

Corrigé de l'interrogation écrite du 13-12-2021

I.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{Z}$ par $f(n)=\dfrac{n}{3}$ si n est divisible par 3 et $f(n)=n^2$ si n n'est pas divisible par 3. Exemples : $f(12)=4$; $f(7)=49$.

$$f(n)=\begin{cases} \dfrac{n}{3} & \text{si } n \text{ n'est pas divisible par 3} \\ n^2 & \text{si } n \text{ n'est pas divisible par 3} \end{cases}$$

1°) Quels sont les antécédents de 25 par f ? 75 ; 5 ; – 5

2°) L'affirmation « Tout entier relatif admet au moins un antécédent par f » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

L'affirmation est vraie.

Considérons en effet un entier relatif k.
On a $f(3k)=\dfrac{3k}{3}=k$.
On en déduit que $3k$ est un antécédent de k par f.

On dit que l'application f : $\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ est surjective.

On peut aussi dire écrire $f(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$.

II.
Soit n un entier relatif impair. On pose $n=2p+1$ avec p entier relatif.
Exprimer $n'=5n$ en fonction de p.
En déduire le chiffre des unités de l'écriture en base dix de n'.

$n'=5n$

$\quad =5(2p+1)$

$\quad =10p+5$

Cette écriture montre que p est le nombre de dizaines de n' et que 5 est le chiffre des unités.

III.
On note E l'ensemble des nombres premiers de la forme $n!+1$ avec n entier naturel.
Par exemple, $3\in \mathrm{E}$ car $3=2!+1$.
Donner sans justifier deux autres éléments de E.

2 7

$2 = 1! + 1$

$7 = 3! + 1$

On peut trouver beaucoup d'autres nombres premiers dans *E*.

Par exemple, $11! + 1 = 39916801$ et $27! + 1$ sont aussi des nombres premiers.
On peut consulter l'article « nombre premier factoriel » sur Wikipedia.
La suite A00298 fournit des nombres premiers de cette forme.

IV.
Déterminer les nombres premiers compris entre 10 et 100 dont la somme des chiffres de leur écriture en base dix est égale à 7.

43 ; 61

V.
On pose $A = \overline{25x}$ et $B = \overline{5y5}$ où x et y des entiers naturels compris entre 0 et 9.
1°) Déterminer x pour que A soit divisible par 3 et par 5. Aucune justification n'est attendue. 5

2°) Déterminer y pour que B soit divisible par 9. Aucune justification n'est attendue. 8
3°) On suppose que x et y ont les valeurs trouvées précédemment.
Déterminer l'écriture irréductible de la fraction $C = \dfrac{A}{B}$.

$$C = \frac{17}{39} \quad \text{(une seule égalité)}$$

VI.
1°) Soit x et y deux entiers relatifs.
On suppose que x et y sont pairs. Dans ce cas, x et y sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

Si x et y sont pairs, il sont tous les divisibles par 2.

Ils admettent donc un diviseur autre que 1 et de – 1.

On en déduit que x et y ne sont pas premiers.

2°) Parmi les deux implications suivantes, laquelle est vraie ? Cocher l'implication choisie.

☐ Si deux entiers relatifs sont premiers entre eux, alors ils sont tous les deux impairs.

☒ Si deux entiers relatifs sont premiers entre eux, alors l'un au moins est impair.

Cette implication est vraie car la contraposée est l'implication « Si deux entiers relatifs sont pairs, alors ils ne sont pas premiers entre eux ».
Cette implication est vraie d'après la question 1°).

VII.

On pose $E = [\![1\,;4]\!]$ et $F = [\![1\,;4]\!]^2$.

On rappelle que F est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ où x et y sont des éléments de E.

Quels sont les éléments de F qui sont formés d'entiers non premiers entre eux ?

$$(2\,;2),\ (2\,;4),\ (4\,;2),\ (3\,;3),\ (4\,;4)$$