

Corrigé du devoir pour le 15-12-2021

I. 1°) On considère les équations $\sin x = 1$ (1) et $\sin x = -1$ (2) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Compléter les phrases suivantes :

- Les solutions de (1) sont les réels de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Les solutions de (2) sont les réels de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Dans le deux cas, on utilise le cercle trigonométrique.

On peut vérifier les résultats avec dcode.

On peut aussi dire que les solutions de (2) sont les réels de la forme $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2°) La proposition « $\forall r \in \mathbb{Q} \quad -1 < \sin r < 1$ » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

La proposition est vraie.

En effet, on sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$ donc $\forall r \in \mathbb{Q} \quad -1 \leq \sin r \leq 1$.

Ensuite, il faut justifier que les inégalités sont strictes.

Or on a vu que les réels dont le sinus est égal à 1 sont les réels de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et que les réels dont le sinus est égal à -1 sont les réels de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On écrit ensuite $\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \pi \times \left(2k + \frac{1}{2}\right)$ et $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \pi \left(2k - \frac{1}{2}\right)$.

Or on sait que π est un nombre irrationnel (c'est-à-dire qu'il est dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Pour $k \in \mathbb{Z}$, $2k + \frac{1}{2}$ et $2k - \frac{1}{2}$ sont des nombres rationnels non nuls.

Or le produit d'un nombre irrationnel par un nombre rationnel non nul est un nombre irrationnel.

Donc $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont des nombres irrationnels.

On a montré que les bornes 1 et -1 ne sont pas atteintes en des nombres rationnels.

On en déduit que $\forall r \in \mathbb{Q} \quad -1 < \sin r < 1$.

II. Déterminer deux nombres premiers vérifiant les conditions suivantes :

- leur écriture en base dix s'écrit avec deux chiffres ;
- si l'on échange les chiffres de l'écriture en base dix de l'un on obtient l'autre ;
- leur somme est comprise entre 100 et 150.

Aucun détail de la recherche n'est attendu.

73 et 37

Les nombres 73 et 37 sont des nombres premiers palindromes.

Les seuls nombres premiers palindromes dont l'écriture en base dix s'écrit avec deux chiffres sont 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97.