T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 10 décembre 2021

Durée : 30 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………….…………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

On considère l'équation différentielle $y'+y=0$ (E).

Déterminer la solution f de (E) telle que $f(\ln 3)=1$. ………………………………….

On attend uniquement l'expression sans détailler la démarche.

II. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points)

On rappelle que pour tout réel x on a : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. On pourra écrire sur deux colonnes.

1°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{\sin n}{2^n}$ pour tout entier naturel n.

Déterminer un encadrement de u_n ; en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=n^2+2n\sin n+1$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $v_n \geqslant (n-1)^2$; en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….…………………………….

III. (4 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - (u_n)^3$ pour tout entier naturel *n*.

1°) On suppose que (u_n) converge vers une limite ℓ.

Écrire sans expliquer l'égalité vérifiée par ℓ. ………………………..

En déduire les valeurs possibles de ℓ.

………..

………..

………..

………..

2°) Dans cette question, on prend $u_0 = -0,5$. On admet que (u_n) converge.

À l'aide de la touche $\boxed{\text{Ans}}$ de la calculatrice, conjecturer sa limite.

On peut conjecturer que (u_n) converge vers …... .

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes sont différents de 1. Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = \dfrac{1+u_n}{1-u_n}$.

On suppose que (u_n) converge vers ℓ (autrement dit $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$).

1°) Dans cette question, on suppose que $\ell \neq 1$. Compléter : $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{}$ ………

2°) Dans cette question, on suppose que $\ell = 1$ et que $u_n < 1$ pour tout entier naturel *n*.

Compléter : $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{}$ ………

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit ABCDEFGH un pavé droit. On pose $\text{AB} = a$, $\text{AD} = b$, $\text{AE} = c$ où *a*, *b*, *c* sont de réels strictement positifs.

1°) Exprimer AG en fonction de *a*, *b*, *c*.

2°) Exprimer en fonction de *a*, *b*, *c* le volume *V* de la pyramide EABCD de sommet E et de base ABCD.

Écrire une seule égalité dans chaque cas.

1°) ……………………………………… 2°) ………………………………………

Corrigé de l'interrogation écrite du 10-12-2021

I.

On considère l'équation différentielle $y'+y=0$ $\quad(\mathrm{E})$.

Déterminer la solution *f* de (E) telle que $f(\ln 3)=1$. $\qquad f(x)=3\mathrm{e}^{-x}$

On attend uniquement l'expression sans détailler la démarche.

(E) s'écrit $y'=-y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-1$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{-x}$ $\quad(k\in\mathbb{R})$.

On cherche *k* tel que $f(\ln 3)=1$ $\quad(1)$.

$(1) \Leftrightarrow k\times \mathrm{e}^{-\ln 3}=1$

$\Leftrightarrow k\times\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 3}}=1$

$\Leftrightarrow k\times\dfrac{1}{3}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{k}{3}=1$ $\quad$ (ligne facultative)

$\Leftrightarrow k=1\times 3$ $\quad$ (ligne facultative)

$\Leftrightarrow k=3$

La solution cherchée est la fonction $f : x \mapsto 3\mathrm{e}^{-x}$.

II.

On rappelle que pour tout réel *x* on a : $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$. On pourra écrire sur deux colonnes.

1°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{\sin n}{2^n}$ pour tout entier naturel *n*.

Déterminer un encadrement de u_n ; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=n^2+2n\sin n+1$.

Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a $v_n\geqslant(n-1)^2$; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

1°)

① $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ (inégalités larges car $(-1)^n$ est égal à 1 ou à – 1)

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{1}{2^n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$ (conservation du sens de l'inégalité puisque 2^n est strictement positif).

On a obtenu un encadrement de u_n.

② On calcule ensuite la limite des deux suites qui encadrent.

$2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$.

Par passage à l'inverse, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.
Par produit par – 1, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2^n}\right) = 0$.

Les deux limites sont toutes les deux égales à 0 donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2°)

① On procède par inégalités successives.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin n \geqslant -1$.

On multiplie les deux membres par 2*n* qui est un réel positif ou nul.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2n \sin n \geqslant -2n$

On peut ajouter $n^2 + 1$ aux deux membres de l'inégalité.

On obtient $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \geqslant n^2 + 1 - 2n$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \geqslant (n-1)^2 \quad (1)$.

② On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1)^2 = +\infty \quad (2)$.

D'après (1) et (2), $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ grâce à l'extension du théorème des gendarmes.

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - (u_n)^3$ pour tout entier naturel *n*.
1°) On suppose que (u_n) converge vers une limite $\mathcal{l}$.
Écrire sans expliquer l'égalité vérifiée par $\mathcal{l}$. $\mathcal{l} = 2\mathcal{l} - \mathcal{l}^3$

Cette égalité s'obtient par passage à la limite dans la relation de récurrence.

En déduire les valeurs possibles de $\mathcal{l}$.

$$
\begin{aligned}
(1) \;&\Leftrightarrow\; \ell-\ell^3=0\\
&\Leftrightarrow\; \ell\left(1-\ell^2\right)=0\\
&\Leftrightarrow\; \ell=0 \text{ ou } \ell=1 \text{ ou } \ell=1
\end{aligned}
$$

Les valeurs possibles de ℓ sont 0, 1 et – 1.

2°) Dans cette question, on prend $u_0=-0,5$. On admet que (u_n) converge.
À l'aide de la touche $\boxed{\text{Ans}}$ de la calculatrice, conjecturer sa limite.

On peut conjecturer que (u_n) converge vers – 1.

On a un comportement oscillant autour de – 1.
La suite (u_n) n'est pas monotone.

On tape – 0,5.
On appuie sur la touche $\boxed{\text{EXE}}$.
On tape l'expression 2ans – ans^3 sur l'écran de la calculatrice.
On appuie ensuite sur la touche $\boxed{\text{EXE}}$.

IV.

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes sont différents de 1. Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n=\dfrac{1+u_n}{1-u_n}$.

On suppose que (u_n) converge vers ℓ (autrement dit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$).

1°) Dans cette question, on suppose que $\ell\neq 1$. Compléter : $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1+\ell}{1-\ell}$

On a $\left.\begin{array}{l} 1+u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+\ell \\ 1-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\ell \end{array}\right\}$ (opérations sur les limites).

Par hypothèse, on a $\ell\neq 1$. Par conséquent, on a : $1-\ell\neq 0$.

Par limite d'un quotient, on a donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1+\ell}{1-\ell}$.

2°) Dans cette question, on suppose que $\ell=1$ et que $u_n<1$ pour tout entier naturel *n*.
Compléter : $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

On sépare limite du numérateur – limite du dénominateur.

Par opérations sur les limites, on obtient :

$$1+u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 \quad (1+1)$$
$$1-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad (1-1)$$

De plus, que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 - u_n > 0$.

On peut donc écrire $1 - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0^+$.

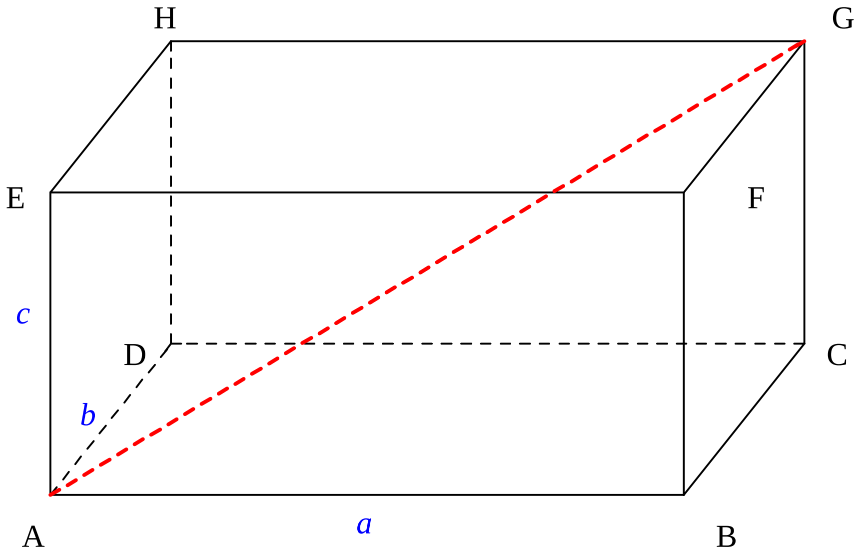
Par limite d'un quotient, compte tenu de $1 + u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$ et $1 - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0^+$, on obtient $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

V.

Soit ABCDEFGH un pavé droit. On pose $\text{AB} = a$, $\text{AD} = b$, $\text{AE} = c$ où *a*, *b*, *c* sont de réels strictement positifs.
1°) Exprimer AG en fonction de *a*, *b*, *c*.
2°) Exprimer en fonction de *a*, *b*, *c* le volume *V* de la pyramide EABCD de sommet E et de base ABCD.
Écrire une seule égalité dans chaque cas.

1°) $\text{AG} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 2°) $V = \dfrac{abc}{3}$

1°) La formule s'obtient par double application du théorème de Pythagore.



La démonstration se trouve dans le chapitre « Droites et plans de l'espace ».

Attention, on ne peut pas simplifier en écrivant $\text{AG} = a + b + c$.

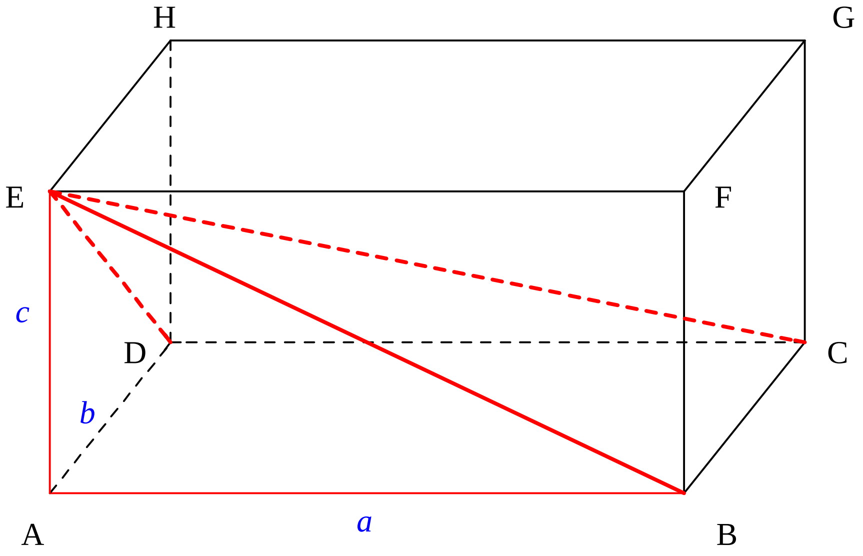
Il est important de vérifier l'homogénéité du résultat (analyse dimensionnelle en physique).

a, *b*, *c* sont des longueurs donc a^2, b^2, c^2 sont des carrés de longueurs.
Leur somme est donc un carré de longueur.

Grâce à la racine carrée, on obtient bien une longueur.

$[\text{AG}]$ est une grande diagonale du pavé droit.

2°)



La pyramide EABCD est située à l'intérieur du pavé droit.

L'aire de la base est ab.
La hauteur est c.

$$V = \frac{\mathcal{A}_{\text{ABCD}} \times \text{AE}}{3}$$

On a $\mathcal{A}_{\text{ABCD}} = ab$ et $\text{AE} = c$.

On obtient $V = \dfrac{abc}{3}$.

On vérifie de la même manière qu'au 1°).
abc est le produit de 3 longueurs.
Il s'agit donc d'un volume.

On peut éventuellement calculer l'aire latérale et l'aire totale de cette pyramide (la question n'était pas posée lors de l'interrogation écrite mais elle est intéressante).

$$\mathcal{A} = ab + \frac{ac}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{2} + \frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{2}$$