T experts

Devoir pour le mercredi 8 décembre 2021

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………..……………………………………

Note : ….. / 20

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes z_0 et z_1 qui sont des nombres complexes donnés ainsi que par la relation de récurrence $z_{n+2} = 2\overline{z_{n+1}} - z_n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Que peut-on dire de la suite (z_n) dans chacun des deux cas suivants ? On attend uniquement une conjecture.

1er cas : $z_0 = z_1 = a$ où *a* est un réel ; 2e cas : $z_1 = \overline{z_0}$.

2°) Dans cette question, on suppose que $z_0 = a$ et que $z_1 = a + \mathrm{i}$ où *a* est un réel.

Conjecturer l'expression de z_n en fonction de *n* et de *a*.

………..…………

……..…

………..…………

………..

………..…………

………..…………

………..…………

………..…………

………..…………

………..…………

………..…………

………..…………

………..…………

Corrigé du devoir pour 8-12-2021

1°)

1$^{\text{er}}$ cas : $z_0 = z_1 = a \quad (a \in \mathbb{R})$

On calcule z_2 et z_3.

$$z_2 = 2\overline{z_1} - z_0 = 2a - a = a$$

$$z_3 = 2\overline{z_2} - z_1 = 2a - a = a$$

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = a$ autrement dit que la suite (z_n) est constante.

On peut démontrer ce résultat en utilisant une récurrence double.

2$^{\text{e}}$ cas : $z_1 = \overline{z_0}$

On calcule z_2 et z_3.

$$z_2 = 2\overline{z_1} - z_0 = 2\overline{\overline{z_0}} - z_0 = z_0$$

$$z_3 = 2\overline{z_2} - z_1 = 2\overline{z_0} - z_1 = 2z_1 - z_1 = z_1$$

On constate que $z_2 = z_0$ et que $z_3 = z_1$.
La suite (z_n) semble donc périodique de période 2.

On peut démontrer ce résultat en utilisant une récurrence double.

2°)

On calcule z_2 et z_3.

$$z_2 = 2(a - \mathrm{i}) - a = a - 2\mathrm{i}$$

$$z_2 = 2(a + 2\mathrm{i}) - (a + \mathrm{i}) = a + 3\mathrm{i}$$

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = a + \mathrm{i}(-1)^{n+1} n$.

On peut démontrer ce résultat en utilisant une récurrence double.