T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 26 novembre 2021

Durée : 30 minutes
- fiche
- calculatrice

I. (9 points : 1°) 5 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2+1}}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Le but de cette question est de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Pour *n* entier naturel quelconque, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ ».

● Commençons par vérifier que la phrase $P(0)$ est vraie.

D'une part, on a $u_0=\ldots$ par définition de la suite $\left(u_n\right)$. D'autre part, on a $\dfrac{1}{\sqrt{\ldots\ldots\ldots}}=\ldots$.

On peut donc écrire $u_0=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, d'où la phrase $P(0)$ est vraie.

● Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k=\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

On sait que $u_{k+1}=\dfrac{u_k}{\sqrt{{u_k}^2+1}}$ par la relation de récurrence qui définit la suite $\left(u_n\right)$.

Par ailleurs, par hypothèse de récurrence, on a $u_k=\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$.

On peut alors exprimer u_{k+1} en fonction de *k* :

$u_{k+1}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

La phrase $P(k+1)$ est donc vraie.

Conclusion : ……………………………………………………………………………………………

………

2°) Écrire une expression simplifiée de $P_n=u_0\times u_1\times\ldots\times u_n$ en fonction de *n* à l'aide d'une factorielle.

$P_n=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3°) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au millième de $S=\sum_{k=0}^{k=2021} u_k$ et $S'=\sum_{k=0}^{k=2021} (-1)^k u_k$.

……… (un seul résultat sans égalité) ……… (un seul résultat sans égalité)

II. (5 points)

On considère un cube ABCDEFGH de centre O.

On rappelle que pour la position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace, on est dans l'un des trois cas suivants :
la droite est sécante au plan (cas a) ;
la droite est incluse dans le plan (cas b) ;
la droite est strictement parallèle au plan (cas c).

Écrire dans la colonne de droite du tableau ci-contre la lettre correspondant au cas de la position relative de la droite et du plan donnés dans la colonne de gauche.

(AB) et (CDE)	
(CE) et (DGH)	
(BF) et (DEG)	
(EG) et (ABC)	
(OH) et (BDF)	

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

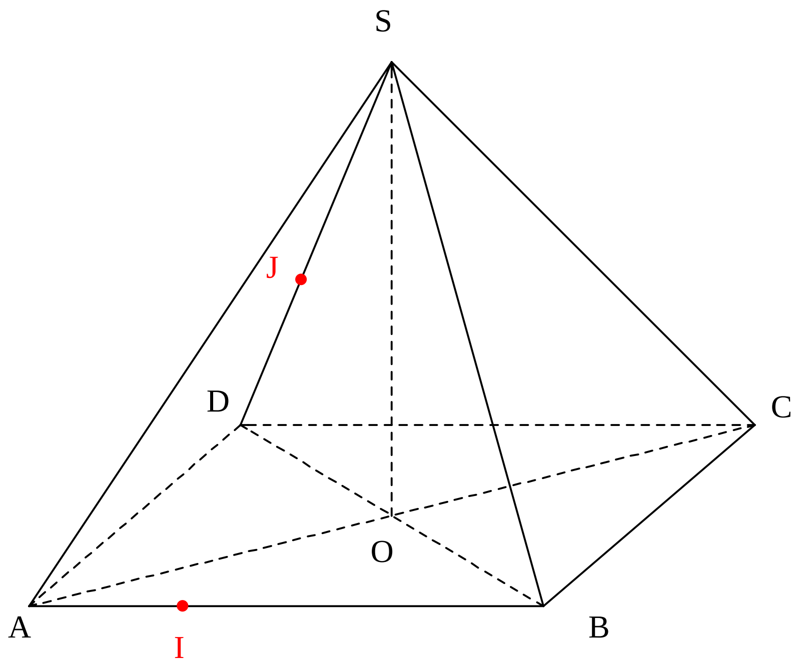
On considère une pyramide régulière SABCD de sommet S dont la base ABCD est un carré de centre O.
Soit I un point quelconque du segment $[\mathrm{AB}]$ distinct de A et de B.

Soit J un point quelconque du segment $[\mathrm{SD}]$ distinct de S et de D.

1°) Construire le point d'intersection M des droites (CI) et (AD) puis le point d'intersection N de la droite (BJ) et du plan (SAC). On n'oubliera pas d'utiliser des pointillés pour les parties cachées.

2°) Compléter l'égalité : $(\mathrm{SAD})\cap(\mathrm{CIJ})=$....... . Aucun tracé n'est demandé pour cette question.

3°) En utilisant l'un des deux points M ou N, construire la section de la pyramide par le plan (CIJ).
On nommera le(s) point(s) utile(s) et on laissera le(s) trait(s) de construction apparent(s).



On pourra hachurer ou colorier la section.

Numéro : …..

Prénom : ……………………..…

Nom : …………………...……

Note : ….. / 20

Corrigé de l'interrogation écrite du 26-11-2021

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2 + 1}}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Le but de cette question est de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Pour *n* entier naturel quelconque, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ ».

● Commençons par vérifier que la phrase $P(0)$ est vraie.

D'une part, on a $u_0 = 1$ par définition de la suite (u_n). D'autre part, on a $\dfrac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$.

On peut donc écrire $u_0 = \dfrac{1}{\sqrt{0+1}}$, d'où la phrase $P(0)$ est vraie.

● Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{k+2}}$.

On sait que $u_{k+1} = \dfrac{u_k}{\sqrt{{u_k}^2 + 1}}$ par la relation de récurrence qui définit la suite (u_n).

Par ailleurs, par hypothèse de récurrence, on a $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$.

On peut alors exprimer u_{k+1} en fonction de k :

$$u_{k+1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{\frac{1}{k+1}+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{\frac{k+2}{k+1}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k+1}\times\sqrt{\frac{k+2}{k+1}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k+2}}$$ (on écrit directement $\sqrt{k+1}\times\sqrt{\frac{k+2}{k+1}}=\sqrt{k+2}$)

La phrase $P(k+1)$ est donc vraie.

Conclusion :

On a démontré que la phrase $P(0)$ est vraie et que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors la phrase $P(k+1)$ est également vraie.
D'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

2°) Écrire une expression simplifiée de $P_n=u_0\times u_1\times ...\times u_n$ en fonction de n à l'aide d'une factorielle.

$$P_n=\frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \ldots \times \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \ldots \times \sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 \times 2 \times \ldots \times (n+1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}$$

On peut aussi utiliser le symbole (la notation) Π (qui désigne le produit) : $P_n = \prod_{k=0}^{k=n} u_k$.

Attention, les réponses $u_n!$ et $\sqrt{n+1}!$ trouvées dans quelques copies n'ont aucun sens.

3°) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au millième de $S = \sum_{k=0}^{k=2021} u_k$ et $S' = \sum_{k=0}^{k=2021} (-1)^k u_k$.

88,484 (un seul résultat sans égalité) 0,594 (un seul résultat sans égalité)

On écrit $S = \sum_{k=0}^{k=2021} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ et $S' = \sum_{k=0}^{k=2021} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$.

Pour S, la calculatrice donne l'affichage suivant : 88,484073007313.

Pour S', la calculatrice donne l'affichage suivant : 0,59378066749757.

Attention, la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique. On ne peut donc pas appliquer les formules qui permettent de réduire la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

II.

On considère un cube ABCDEFGH de centre O.

On rappelle que pour la position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace, on est dans l'un des trois cas suivants :
la droite est sécante au plan (cas a) ;
la droite est incluse dans le plan (cas b) ;
la droite est strictement parallèle au plan (cas c).

Écrire dans la colonne de droite du tableau ci-contre la lettre correspondant au cas de la position relative de la droite et du plan donnés dans la colonne de gauche.

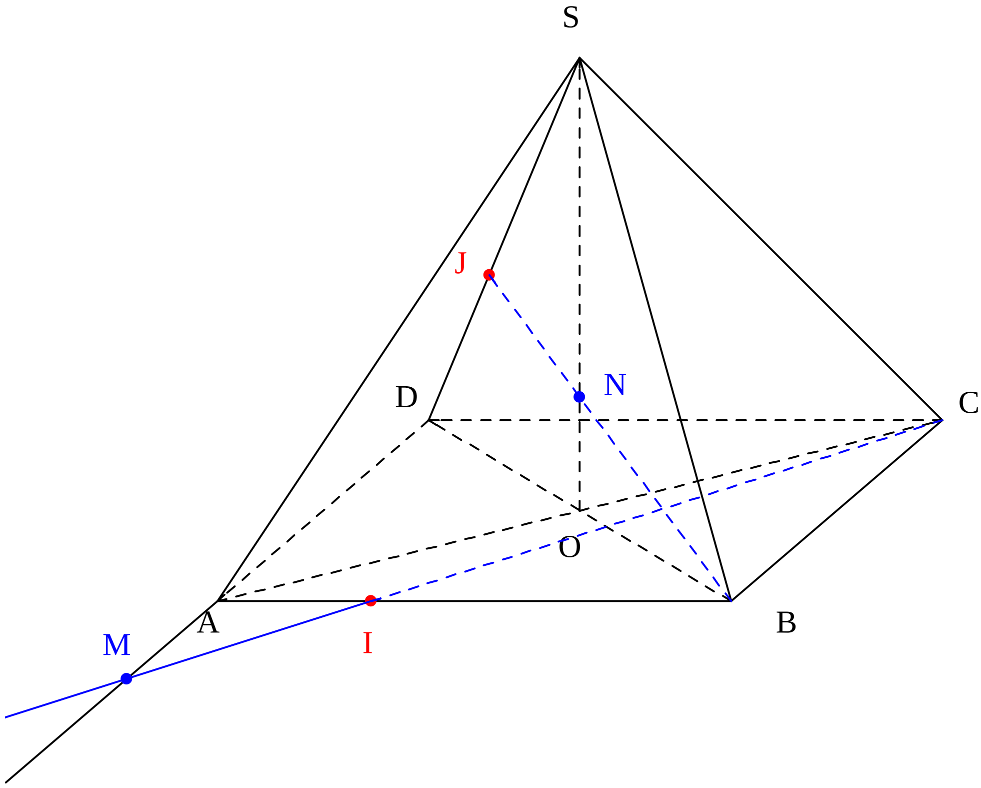
(AB) et (CDE)	c
(CE) et (DGH)	a
(BF) et (DEG)	a
(EG) et (ABC)	c
(OH) et (BDF)	b

III.

On considère une pyramide régulière SABCD de sommet S dont la base ABCD est un carré de centre O.
Soit I un point quelconque du segment $[AB]$ distinct de A et de B.

Soit J un point quelconque du segment $[SD]$ distinct de S et de D.

1°) Construire le point d'intersection M des droites (CI) et (AD) puis le point d'intersection N de la droite (BJ) et du plan (SAC). On n'oubliera pas d'utiliser des pointillés pour les parties cachées.

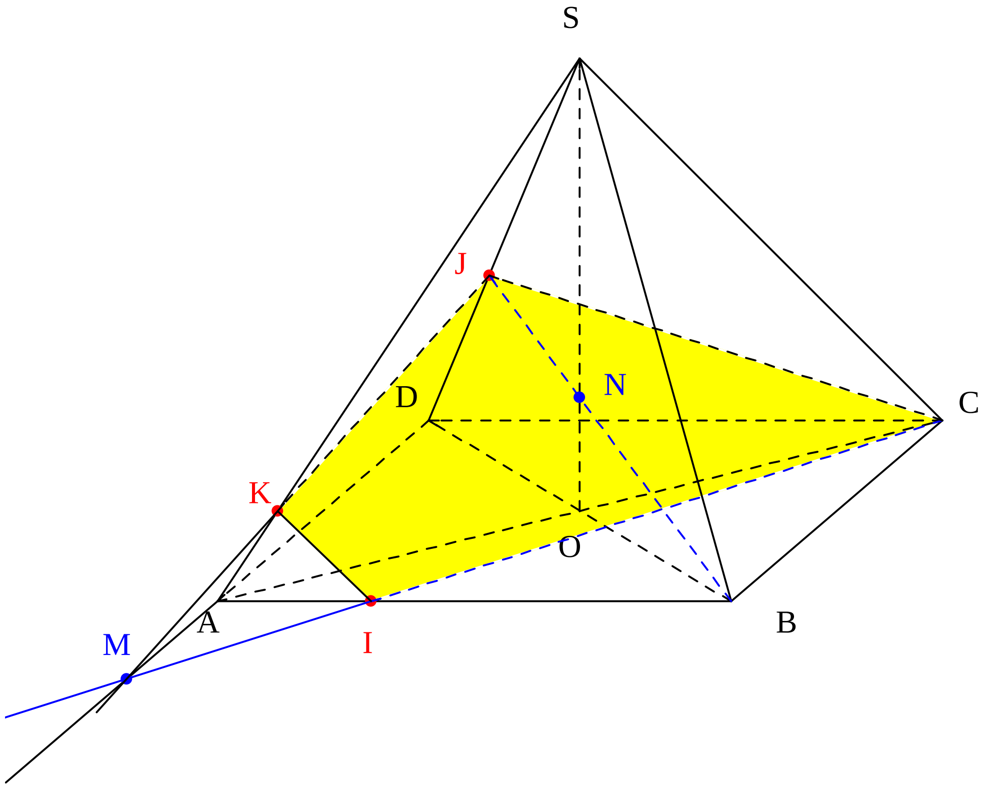


N est le point d'intersection des droites (BJ) et (SO).
Le segment $[BJ]$ doit être tracé en pointillés puisqu'il est à l'intérieur de la pyramide, et est donc caché.

2°) Compléter l'égalité : $(SAD) \cap (CIJ) = (JM)$. Aucun tracé n'est demandé pour cette question.

Il s'agit d'une égalité d'ensembles.

3°) En utilisant l'un des deux points M ou N, construire la section de la pyramide par le plan (CIJ).
On nommera le(s) point(s) utile(s) et on laissera le(s) trait(s) de construction apparent(s).



On pourra hachurer ou colorier la section.

On crée le point K d'intersection des droites (JM) et (SA).

La section de la pyramide par le plan (CIJ) est le quadrilatère ICJK qui n'a pas de particularité.