T experts

Devoir pour le mercredi 1er décembre 2021

Numéro : …..

Prénom et nom : …………………..…………………………………

Note : ….. / 20

I. On considère les matrices $\text{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$, $\text{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c' \\ a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \end{pmatrix}$, $\text{C}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c'' \\ a'' & 0 & 0 \\ 0 & b'' & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' sont des nombres complexes quelconques.

Calculer la matrice $\text{M}=\text{ABC}$ à la main puis vérifier en utilisant le site dcode. Comment appelle-t-on ce type de matrice ?

II. On considère la fonction $f: \begin{array}{l} \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z+\dfrac{1}{z} \end{array}$.

1°) Quels sont les antécédents de 0 par f ? Répondre directement sans faire de phrase et sans écrire d'égalités.

…………

2°) Démontrer que les affirmations suivantes sont vraies :
Affirmation A : « L'image d'un réel non nul par f est un réel ».
Affirmation B : « L'image d'un imaginaire pur non nul par f est un imaginaire pur ».

………

………

………

………

………

Corrigé du devoir pour le 1-12-2021

I. On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0&0&c\\a&0&0\\0&b&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&c'\\a'&0&0\\0&b'&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0&c''\\a''&0&0\\0&b''&0\end{pmatrix}$ où a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' sont des nombres complexes quelconques.
Calculer la matrice $M=ABC$ à la main puis vérifier en utilisant le site dcode. Comment appelle-t-on ce type de matrice ?

$M=ABC$

$$=\begin{pmatrix}0&0&c\\a&0&0\\0&b&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&c'\\a'&0&0\\0&b'&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&c''\\a''&0&0\\0&b''&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&b'c&0\\0&0&ac'\\a'b&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&c''\\a''&0&0\\0&b''&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a''b'c&0&0\\0&ab''c'&0\\0&0&a'bc''\end{pmatrix}$$

M est une matrice diagonale.

II. On considère la fonction $f:\ \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$.

$$z \mapsto z+\frac{1}{z}$$

1°) Quels sont les antécédents de 0 par f ? Répondre directement sans faire de phrase et sans écrire d'égalités.

$$\mathrm{i}\ ;-\mathrm{i}$$

2°) Démontrer que les affirmations suivantes sont vraies :
Affirmation A : « L'image d'un réel non nul par f est un réel ».
Affirmation B : « L'image d'un imaginaire pur non nul par f est un imaginaire pur ».

● Démontrons que l'affirmation A est vraie.

Soit z un nombre réel non nul.

De manière évidente, $\frac{1}{z}$ est aussi un réel.

Or la somme de deux réels est un réel donc $f(z)=z+\frac{1}{z}$ est aussi un réel.

● Démontrons que l'affirmation B est vraie.

Soit z un imaginaire pur non nul.

On pose $z = \mathrm{i}y$ avec y non nul.

On calcule $f(z)$ en fonction de y.

$$f(z) = \mathrm{i}y + \frac{1}{\mathrm{i}y}$$

$$= \mathrm{i}y - \frac{\mathrm{i}}{y} \text{ (car } \frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}\text{)}$$

$$= \mathrm{i}\left(y - \frac{1}{y}\right)$$

Comme y est un réel, $y - \frac{1}{y}$ est un réel.

On en déduit que $f(z)$ est un imaginaire pur.