T exp

Interrogation écrite du lundi 22 novembre 2021 (20 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (6 points)

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ où *a*, *b* et *c* sont des nombres complexes quelconques.

Calculer A^2 et A^3. Vérifier que $\mathrm{A}^3 = abc\mathrm{I}$ où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

……

……

……

……

……

……

II. (4 points)

On considère les matrices $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} z^2 & 3 \\ 0 & \mathrm{i}z' \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$ où z et z' sont des nombres complexes.

Déterminer les nombres complexes z et z' tels que $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

……

……

……

……

III. (5 points : 3 points + 2 points)

Soit x et y deux réels quelconques. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & y \\ -y & x & x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $C = AB$.

....

....

....

....

Calculer le déterminant de C.

....

IV. (5 points : 3 points + 2 points)

On pose $A = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2t & -t \end{pmatrix}$ où t est un réel quelconque.

Calculer $B = A^2$. Pour quelles valeurs de t la matrice B est-elle la matrice nulle ?

....

....

....

....

....

....

....

....

Corrigé de l'interrogation écrite du 22-11-2021

I.

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des nombres complexes quelconques.

Calculer A^2 et A^3. Vérifier que $\mathrm{A}^3=abc\mathrm{I}$ où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

$$\mathrm{A}^2=\mathrm{A}\times\mathrm{A}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & ac \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^3=\mathrm{A}\times\mathrm{A}^2$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & ac \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix}$$

$$=abc\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=abc\mathrm{I}$$

II.

On considère les matrices $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} z^2 & 3 \\ 0 & \mathrm{i}z' \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$ où z et z' sont des nombres complexes.

Déterminer les nombres complexes z et z' tels que $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

On cherche $(z\,;z')\in\mathbb{C}^2$ tels que $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = -4 & (1') \\ \mathrm{i}z' = 1+\mathrm{i} & (1'') \end{cases}$$

$$(1') \Leftrightarrow z = 2\mathrm{i} \text{ ou } z = -2\mathrm{i}$$

$$(1'') \Leftrightarrow z' = \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$$

$$\Leftrightarrow z' = -\mathrm{i} + 1$$

$$\Leftrightarrow z' = 1 - \mathrm{i}$$

Les couples cherchés sont $(2\mathrm{i}\,;1-\mathrm{i})$ et $(-2\mathrm{i}\,;1-\mathrm{i})$.

III.

Soit x et y deux réels quelconques. On considère les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} x & y & y \\ -y & x & x \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$.

C est une matrice carrée d'ordre 2.

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} x & y & y \\ -y & x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

Calculer le déterminant de C.

$$\det \mathrm{C} = \begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix}$$

$$= x^2 + y^2$$

IV.

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2t & -t \end{pmatrix}$ où t est un réel quelconque.

Calculer $\mathrm{B} = \mathrm{A}^2$. Pour quelles valeurs de t la matrice B est-elle la matrice nulle ?

$\mathrm{B} = \mathrm{A}^2$

$$= \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2t & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2t & -t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t^2 + 6t & 0 \\ 0 & t^2 + 6t \end{pmatrix}$$

On cherche les réels t tels que $\mathrm{B} = 0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow t^2 + 6t = 0$

$\Leftrightarrow t(t+6) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$ ou $t = -6$