T experts

Devoir pour le mercredi 24 novembre 2021

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………….……………………………….

Note : ….. / 20

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\frac{1}{2}z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+6+\sqrt{2}=0 \quad (1)$ et $z^4=2 \quad (2)$.

Vérifier en utilisant le site dcode.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du devoir pour le 24-11-2021

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{1}{2}z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+6+\sqrt{2}=0 \quad (1)$.

(1) est une équation du second degré à coefficients réels.

On calcule son discriminant Δ.

$$\begin{aligned}\Delta &= \left[-\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^2-4\times\frac{1}{2}\times\left(6+\sqrt{2}\right)\\ &=\left(1+\sqrt{2}\right)^2-2\left(6+\sqrt{2}\right)\\ &=3+\cancel{2\sqrt{2}}-12-\cancel{2\sqrt{2}}\\ &=-9\end{aligned}$$

On a : $\Delta<0$ donc (1) admet deux racines complexes distinctes conjuguées z_1 et z_2 dont les calculs sont donnés ci-après en utilisant les formules du cours ($\sqrt{-\Delta}=\sqrt{9}=3$) :

$$\begin{aligned}z_1&=\frac{1+\sqrt{2}+3\text{i}}{2\times\frac{1}{2}}\\ &=1+\sqrt{2}+3\text{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2&=\frac{1+\sqrt{2}-3\text{i}}{2\times\frac{1}{2}}\\ &=1+\sqrt{2}-3\text{i}\end{aligned}$$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

On a $S_1=\left\{1+\sqrt{2}+3\text{i}\,;1+\sqrt{2}-3\text{i}\right\}$.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4=2 \quad (2)$.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \left(z^2\right)^2=2\\ &\Leftrightarrow z^2=\sqrt{2} \text{ ou } z^2=-\sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow z=\sqrt{\sqrt{2}} \text{ ou } z=-\sqrt{\sqrt{2}} \text{ ou } z=\text{i}\sqrt{\sqrt{2}} \text{ ou } z=-\text{i}\sqrt{\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{2} \text{ ou } z=-\sqrt[4]{2} \text{ ou } z=\text{i}\sqrt[4]{2} \text{ ou } z=-\text{i}\sqrt[4]{2}\end{aligned}$$

On utilise la racine quatrième : la racine quatrième d'un réel positif ou nul est la racine carrée de sa racine carrée.

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

On a $S_2=\left\{\sqrt[4]{2}\,;-\sqrt[4]{2}\,;\text{i}\sqrt[4]{2}\,;-\text{i}\sqrt[4]{2}\right\}$.