T1 spécialité

Interrogation écrite du vendredi 19 novembre 2021

Durée : 30 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……..…….

Note : ….. / 20

I. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = (n+1)!-n!$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_0, u_1, u_2. On effectuera les résultats au brouillon.

$u_0 =$ ..... (un seul résultat) $u_1 =$ ..... (un seul résultat) $u_2 =$ ..... (un seul résultat)

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_n = n \times n!$.

L'écriture $n \times n!$ doit être comprise comme $n \times (n!)$. On attend seulement deux ou trois lignes de calculs.

……..

……..

……..

……..

II. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = 2u_n + n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3. Écrire le détail des calculs sur la ligne en dessous.

$u_1 =$ ..... (un seul résultat) $u_2 =$ ..... (un seul résultat) $u_3 =$ ..... (un seul résultat)

……..

2°) Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1. Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et de n.

On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

……. (une seule égalité)

III. (3 points : 2 points + 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = 1 - e^{-n}$ pour tout entier naturel *n*.

Le but de l'exercice est de démontrer que (u_n) est majorée.

On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui permettent de démontrer ce résultat.

① On peut donc dire que pour tout entier naturel *n* on a $u_n \leqslant 1$.

② En ajoutant ensuite 1 aux deux membres de l'inégalité (2), on obtient l'inégalité $1 - e^{-n} < 1$ soit $u_n < 1$ (3).

③ On en déduit que la suite (u_n) est majorée.

④ Soit *n* un entier naturel quelconque.

⑤ En multipliant par – 1 les deux membres de l'inégalité (1), on obtient l'inégalité $-e^{-n} < 0$ (2).

⑥ On peut donc écrire $e^{-n} > 0$ (1).

⑦ On sait que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives.

⑧ On sait qu'une inégalité stricte entraîne une inégalité large donc on peut écrire $u_n \leqslant 1$.

Remettre les phrases dans l'ordre en écrivant uniquement les numéros sur la ligne ci-contre. ……

Que peut-on dire du nombre 1 pour la suite (u_n) ? Répondre par une phrase.

……..

IV. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = \dfrac{1-u_n}{1+u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_1 et u_2.

$u_1 =$ ..... (un seul résultat) $u_2 =$ ..... (un seul résultat)

Compléter la phrase : La suite (u_n) est périodique de période ….

2°) Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_{2021}$. $S =$ ..... (un seul résultat)

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère un cube ABCDEFGH de centre O. Soit I et J deux points quelconques appartenant respectivement aux droites (EH) et (GH) avec I distinct de H. On note *P* le plan contenant les points B, D, F, H.

1°) Compléter par le symbole $\in$ ou $\notin$. I … *P* J … *P* O … *P*

2°) Répondre par oui ou non.

Les droites (OI) et (AB) sont-elles coplanaires ? …….

Les droites (OI) et (AB) sont-elles sécantes ? …….

La droite (IJ) est-elle sécante à *P* ? ……. (on suppose que I et J ne sont pas confondus)

T6 et 7 spécialité

Interrogation écrite du vendredi 19 novembre 2021

Durée : 30 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……..…….

Note : ….. / 20

I. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = (n+1)!-n!$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_0, u_1, u_2. On effectuera les résultats au brouillon.

$u_0 =$ ..... (un seul résultat) $u_1 =$ ..... (un seul résultat) $u_2 =$ ..... (un seul résultat)

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_n = n \times n!$.

L'écriture $n \times n!$ doit être comprise comme $n \times (n!)$. On attend seulement deux ou trois lignes de calculs.

……..

……..

……..

……..

II. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = 2u_n + n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3. Écrire le détail des calculs sur la ligne en dessous.

$u_1 =$ ..... (un seul résultat) $u_2 =$ ..... (un seul résultat) $u_3 =$ ..... (un seul résultat)

……..

2°) Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1. Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et de n.

On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

……. (une seule égalité)

III. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = 1 - e^{-n}$ pour tout entier naturel *n*.

Le but de l'exercice est de démontrer que (u_n) est majorée.

On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui permettent de démontrer ce résultat.

① On peut donc dire que pour tout entier naturel *n* on a $u_n \leqslant 1$.

② En ajoutant ensuite 1 aux deux membres de l'inégalité (2), on obtient l'inégalité $1 - e^{-n} < 1$ soit $u_n < 1$ (3).

③ On en déduit que la suite (u_n) est majorée.

④ Soit *n* un entier naturel quelconque.

⑤ En multipliant par – 1 les deux membres de l'inégalité (1), on obtient l'inégalité $-e^{-n} < 0$ (2).

⑥ On peut donc écrire $e^{-n} > 0$ (1).

⑦ On sait que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives.

⑧ On sait qu'une inégalité stricte entraîne une inégalité large donc on peut écrire $u_n \leqslant 1$.

Remettre les phrases dans l'ordre en écrivant uniquement les numéros sur la ligne ci-contre. ……

Que peut-on dire du nombre 1 pour la suite (u_n) ? Répondre par une phrase en français.

……..

IV. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = \dfrac{1-u_n}{1+u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_1 et u_2.

$u_1 =$ ..... (un seul résultat) $u_2 =$ ..... (un seul résultat)

Compléter la phrase : La suite (u_n) est périodique de période ….

2°) Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_{2021}$. $S =$ ..... (un seul résultat)

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère un cube ABCDEFGH de centre O. Soit I et J deux points quelconques appartenant respectivement aux droites (EH) et (GH). On note *P* le plan contenant les points B, D, F, H.

1°) Compléter par le symbole $\in$ ou $\notin$. I … *P* J … *P* O … *P*

2°) Répondre par oui ou non.

Les droites (OI) et (BC) sont-elles coplanaires ? …….

Les droites (OI) et (BC) sont-elles sécantes ? …….

La droite (IJ) est-elle sécante à *P* ? ……. (on suppose que I et J ne sont pas confondus)

Bonus donné à l'oral :

On reprend la suite (u_n) de l'exercice **IV**.

Calculer $S' = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k u_k$.

Corrigé de l'interrogation écrite du 19-11-2021

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = (n+1)! - n!$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_0, u_1, u_2. On effectuera les résultats au brouillon.

$u_0 = 0$ (un seul résultat) $\quad$ $u_1 = 1$ (un seul résultat) $\quad$ $u_2 = 4$ (un seul résultat)

$$\begin{array}{l|l|l} u_0 = 1! - 0! & u_1 = 2! - 1! & u_2 = 3! - 2! \\ \quad = 1 - 1 & \quad = 2 - 1 & \quad = 6 - 2 \\ \quad = 0 & \quad = 1 & \quad = 4 \end{array}$$

On vérifie les trois résultats en rentrant la suite dans la calculatrice.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_n = n \times n!$.

L'écriture $n \times n!$ doit être comprise comme $n \times (n!)$. On attend seulement deux ou trois lignes de calculs.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n &= n! \times (n+1) - n! \\ &= n! \times \left[(n+1) - 1 \right] \\ &= n! \times n \\ &= n \times n! \end{aligned}$$

Autre méthode : à éviter

On développe les factorielles.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n &= 1 \times 2 \times \ldots \times n \times (n+1) - 1 \times 2 \times \ldots \times n \\ &= \ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3. Écrire le détail des calculs sur la ligne en dessous.

$u_1 = 5$ (un seul résultat) $\quad$ $u_2 = 10$ (un seul résultat) $\quad$ $u_3 = 23$ (un seul résultat)

$u_1 = 2u_0 + 0^2 - 1$
$= 6 - 1$
$= 5$

$u_2 = 2u_1 + 1^2 - 1$
$= 10 + 1 - 1$
$= 10$

$u_3 = 2u_2 + 2^2 - 1$
$= 20 + 4 - 1$
$= 23$

On vérifie les trois résultats en rentrant la suite dans la calculatrice.

2°) Soit *n* un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1. Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et de *n*.
On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

$$u_n = 2u_{n-1} + n^2 - 2n \text{ (une seule égalité)}$$

$u_n = 2u_{n-1} + (n-1)^2 - 1$

$= 2u_{n-1} + n^2 - 2n + 1 - 1$

$= 2u_{n-1} + n^2 - 2n$

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = 1 - e^{-n}$ pour tout entier naturel *n*.

Le but de l'exercice est de démontrer que (u_n) est majorée.
On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui permettent de démontrer ce résultat.

① On peut donc dire que pour tout entier naturel *n* on a $u_n \leqslant 1$.

② En ajoutant ensuite 1 aux deux membres de l'inégalité (2), on obtient l'inégalité $1 - e^{-n} < 1$ soit $u_n < 1$ (3).

③ On en déduit que la suite (u_n) est majorée.

④ Soit *n* un entier naturel quelconque.

⑤ En multipliant par – 1 les deux membres de l'inégalité (1), on obtient l'inégalité $-e^{-n} < 0$ (2).

⑥ On peut donc écrire $e^{-n} > 0$ (1).

⑦ On sait que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives.

⑧ On sait qu'une inégalité stricte entraîne une inégalité large donc on peut écrire $u_n \leqslant 1$.

Remettre les phrases dans l'ordre en écrivant uniquement les numéros sur la ligne ci-contre.

④ ⑦ ⑥ ⑤ ② ⑧ ① ③

Que peut-on dire du nombre 1 pour la suite (u_n) ? Répondre par une phrase en français.

Le nombre 1 est [un] majorant de la suite (u_n).

L'article indéfini « un » est très important car il y a une infinité de majorants.
Le barème prévoyait 0 point pour une phrase avec l'article défini « le ».

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1-u_n}{1+u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_1 et u_2.

$u_1 = -\dfrac{1}{2}$ (un seul résultat) $\qquad$ $u_2 = 3$ (un seul résultat)

$u_1 = \dfrac{1-3}{1+3} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $u_2 = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$

On vérifie les deux résultats en rentrant la suite dans la calculatrice.

Compléter la phrase : $\qquad$ La suite (u_n) est périodique de période 2.

2°) Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_{2021}$. $\qquad$ $S = 2527,5$ (un seul résultat)

La suite n'est ni arithmétique ni géométrique. On ne peut donc pas appliquer les formules de sommes de termes consécutifs pour ces deux types de suites.

On peut écrire $S = \sum_{k=0}^{k=2021} u_k$. Cette écriture n'a cependant pas grand intérêt pour le calcul.

On va utiliser la propriété de périodicité de la suite en groupant les termes par deux.

On peut écrire $S = (u_0 + u_1) + (u_2 + u_3) + ... + (u_{2020} + u_{2021})$.

Chaque parenthèse est égale à $3 - \dfrac{1}{2} = 2,5$.

De plus, la somme de départ comporte 2022 termes donc sous la forme de groupements, on a 1011 termes égaux chacun à 2,5.

Ainsi, $S = 1011 \times 2,5 = 2527,5$.

On peut aussi donner le résultat sous forme fractionnaire : $S = \dfrac{5055}{2}$.

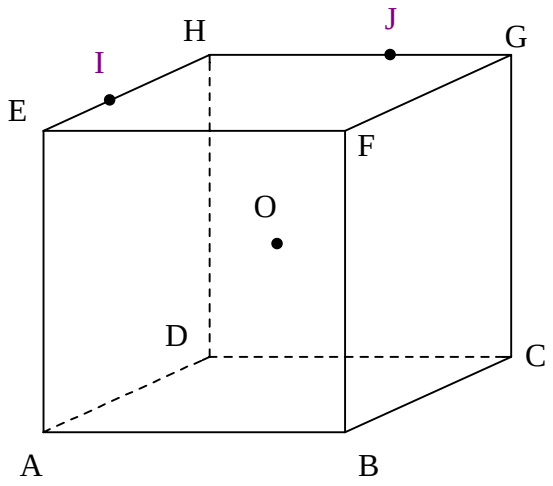
V.

Version T1 :

On considère un cube ABCDEFGH de centre O. Soit I et J deux points quelconques appartenant respectivement aux droites (EH) et (GH) avec I distinct de H. On note *P* le plan contenant les points B, D, F, H.

Version T6 et T7 :

On considère un cube ABCDEFGH de centre O. Soit I et J deux points quelconques appartenant respectivement aux droites (EH) et (GH). On note *P* le plan contenant les points B, D, F, H.



Le centre du cube est le milieu des segments $[AG]$, $[BH]$, $[CE]$, $[DF]$.
Ces segments n'ont pas été tracés pour ne pas alourdir inutilement la figure.

1°) Compléter par le symbole $\in$ ou $\notin$. $I \notin P$ $J \in P$ $O \in P$

2°) Répondre par oui ou non.

Version T1 :

Les droites (OI) et (AB) sont-elles coplanaires ? non

Les droites (OI) et (AB) sont-elles sécantes ? non

La droite (IJ) est-elle sécante à *P* ? oui

Version T6 et T7 :

Les droites (OI) et (BC) sont-elles coplanaires ? oui

Les droites (OI) et (BC) sont-elles sécantes ? oui

La droite (IJ) est-elle sécante à *P* ? oui (on suppose que I et J ne sont pas confondus)

Corrigé du bonus donné à l'oral :

On reprend la suite (u_n) de l'exercice **IV**.

Calculer $S' = \sum_{k=0}^{k=2021} (-1)^k u_k$.

On reprend la même méthode que pour calculer *S* (pas de formule).

On peut écrire $S' = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + ... + (u_{2020} - u_{2021})$.

Chaque parenthèse est égale à $3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 3,5$.

De plus, la somme de départ comporte 2022 termes. On a donc, sous la forme de groupements, 1011 termes égaux chacun à 3,5.

Ainsi, $S' = 1011 \times 3,5 = 3538,5$.